Definizione di sent, cost e tgt.

Relazioni fra seno e coseno di angoli complementari, supplementari, sfasati di $\frac{\pi}{2}$ e π.

Trigonometria

Definizione di seno e coseno (una tra le altre. Esistono varie definizioni di seno e coseno e un buon esercizio potrebbe essere quello di studiare da un libro una definizione diversa da quella che segue e poi giustificare come da una delle due si passa all'altra e viceversa):

1. consideriamo una circonferenza centrata nell'origine di raggio *1* nel piano cartesiano che ha equazione $x^2+y^2=1$;

2. prendiamo un numero reale a piacere indicato con la lettera $t : t \in \Re$ (dove $\Re$ è l'insieme dei numeri reali);

3. interpretiamo *t* positivo *(>0)* come un angolo espresso in radianti, e se è positivo va rappresentato come nella figura 1, ossia bisogna che una delle due semirette che lo delimitano coincida con il semiasse delle x positive ed è fissa, la posizione dell'altra invece dipende dal valore (dall'ampiezza) di *t* , più *t* è grande più la semiretta libera si sposta in senso antiorario; se invece *t* è negativo la semiretta libera ruota in senso orario al crescere del valore assoluto da *t* (come nella figura 2).

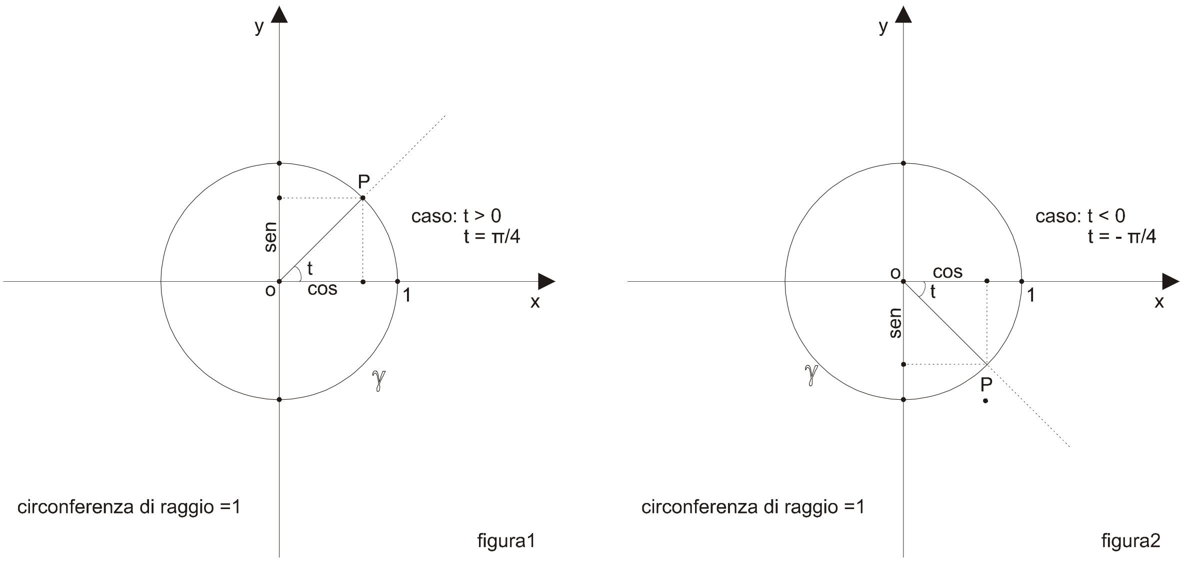


figura1 figura2

Disegnata una circonferenza centrata nell'origine di raggio *1*, che ha equazione $x^2+y^2=1$, diamo dei valori numerici agli angoli che intervengono nei due disegni, ad esempio diciamo che *t* vale $\frac{\pi}{4}$ (ricordiamo che il radiante è l'unità di misura degli angoli tale che l'angolo piatto misura π radianti per definizione, di conseguenza l'angolo retto misura $\frac{\pi}{2}$, dunque l'angolo in figura, che è la metà dell'angolo retto, è $\frac{\pi}{4}$ radianti). Nella figura 2 l'ampiezza dell'angolo è uguale ma corrisponde a un valore negativo della variabile *t*, possiamo dire che $t = -\frac{\pi}{4}$; se $t < 0$ si procede come in figura 2, se $t = 0$ le due semirette coincidono con il semiasse delle x positive;

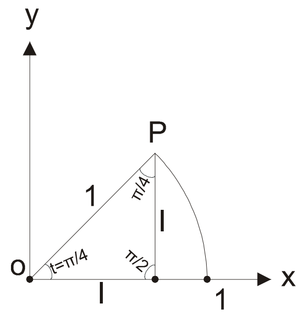
4. la semiretta libera, la cui posizione dipende da *t* interseca la circonferenza γ in un punto *P*, la cui ascissa e ordinata sono per definizione *cost* e *sent*, quindi *P=(cost, sent)*.

Siccome t ha il particolare valore numerico $\dfrac{\pi}{4}$ possiamo anche calcolare se è positivo.

Esercizio

Calcolare $sen\dfrac{\pi}{4}$, $cos\dfrac{\pi}{4}$, $sen\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$, $cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

In base alla definizione dobbiamo trovare le coordinate del punto *P* della figura 1 e della figura 2.
Per ipotesi il raggio della circonferenza è unitario. Per trovare le coordinate del punto *P* conviene costruire un triangolo rettangolo avente il segmento $\overline{OP}$ come ipotenusa e i cateti paralleli agli assi coordinati.



Triangolo rettangolo e isoscele

Questo triangolo è rettangolo per costruzione.

Per ipotesi l'angolo $t=\dfrac{\pi}{4}$, siccome la somma degli angoli interni di un qualunque triangolo è πrad, siccome l'angolo retto è $\dfrac{\pi}{2}$, si deduce che l'altro angolo è $\dfrac{\pi}{4}$, in questo modo la somma degli angoli interni è π. Siccome gli angoli in *o* e in *P* sono uguali tra loro, il triangolo è isoscele cioè i cateti sono di uguale lunghezza e gli angoli sono di *45*°, che espresso in radianti è $\dfrac{\pi}{4}$.

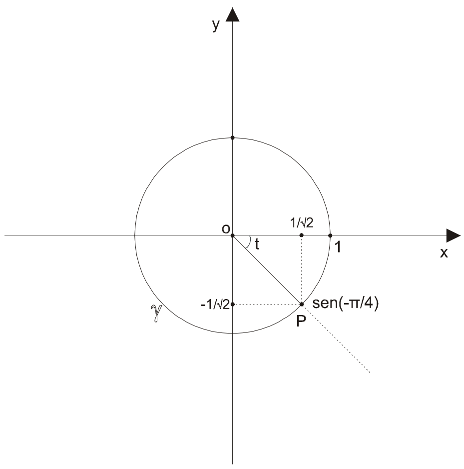
Il triangolo è rettangolo e anche isoscele quindi è la metà di un quadrato.
Indicato con *l* il lato del quadrato, ossia il cateto del triangolo rettangolo considerato, possiamo applicare il teorema di Pitagora che ci dice che l'ipotenusa al quadrato, ossia 1^2 è uguale al quadrato del primo cateto l^2 più il quadrato dell'altro l^2:

$1^2=l^2+l^2$ (teorema di Pitagora) $\rightarrow 1^2=2l^2 \rightarrow l^2=\dfrac{1}{2} \rightarrow 1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Di conseguenza l'ascissa di $P=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, e l'ordinata di $P=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

In base alla definizione di seno e coseno possiamo concludere che: $sen\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Per completare l'esercizio passiamo al valore di $t=-\dfrac{\pi}{4}$.



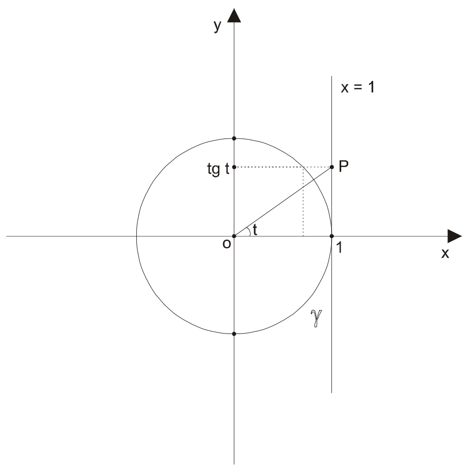
In questo caso essendo *t* negativo si considera una semiretta coincidente con il semiasse delle *x* positive come sempre, e un'altra ruotata a partire da quella precedente di un angolo di $\dfrac{\pi}{4}$ (senza il meno). La semiretta ruotata di $\dfrac{\pi}{4}$ in senso orario interseca la circonferenza trigonometrica in un punto che chiamiamo *P* le cui coordinate sono da determinarsi. Per simmetria con l'esercizio precedente si può concludere che l'ascissa di *P* è $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ mentre la sua ordinata è $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, quindi $sen\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (il seno è l'ordinata di *P*); $cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Queste espressioni si possono anche scrivere diversamente.

Prendiamo $\frac{1}{\sqrt{2}}$, siccome moltiplicando numeratore e denominatore di una frazione per una stessa quantità diversa da *0* il valore della frazione non cambia, questa frazione si può riscrivere così: $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2 \cdot \sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$; ossia ho moltiplicato numeratore e denominatore per una stessa quantità maggiore di *0*: $\sqrt{2}$; quindi al posto di $\frac{1}{\sqrt{2}}$ si può scrivere $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$.

Un altra funzione molto importante è la tangente trigonometrica.

Definizione di tangente trigonometrica:

1. Consideriamo ancora la circonferenza γ e la retta di equazione $x=1$;



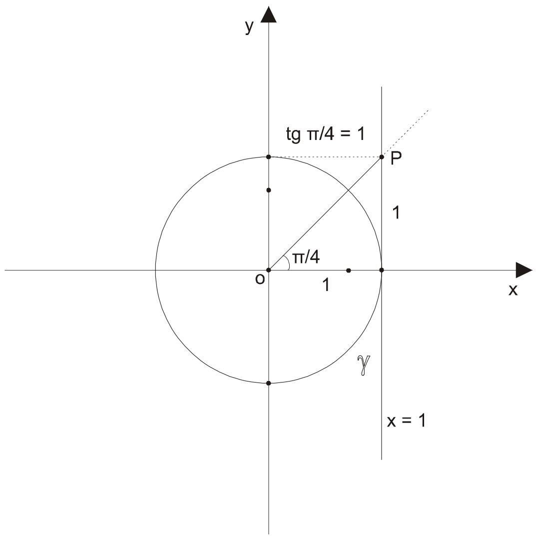
2. preso un qualunque $t \in \Re$, lo interpretiamo come prima, cioè se *t* è positivo lo interpretiamo come un angolo in radianti delimitato da due semirette una delle quali coincide con il semiasse positivo delle x, l’altra si ottiene ruotando il semiasse positivo delle *x* in senso antiorario dell’angolo *t*, se invece *t* è negativo si interpreta come *-t*, come un angolo preso in radianti e lo si rappresenta sempre con una semiretta che coincide con il semiasse positivo delle *x* e l’altra che si ottiene da esso ruotando in senso orario dell’angolo *-t*. Siccome si vuole che la semiretta la cui posizione dipende da *t* intersechi la retta di equazione $x=1$ bisogna evitare che le due siano parallele, quindi supponiamo inoltre che la differenza tra *t* e l’angolo retto, ossia $t - \frac{\pi}{2}$, non sia un multiplo di π, perchè si vuole evitare che che *t* sia l’angolo retto tale da determinare il parallelismo tra la semiretta rotante e la retta $x=1$, quindi supponiamo che questa differenza non sia un multiplo di π;
3. Sotto quest’ipotesi (le condizioni precedenti) la semiretta la cui posizione dipende da *t* o il suo prolungamento, interseca la retta $x=1$ in un punto *P*;
4. si definisce tangente di t *(tgt)* l’ordinata del punto *P*.

Esercizi:

determinare: $tg\frac{\pi}{4}$, $tg\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, $tg\frac{5}{4}\pi$, $tg\frac{3}{2}\pi$.

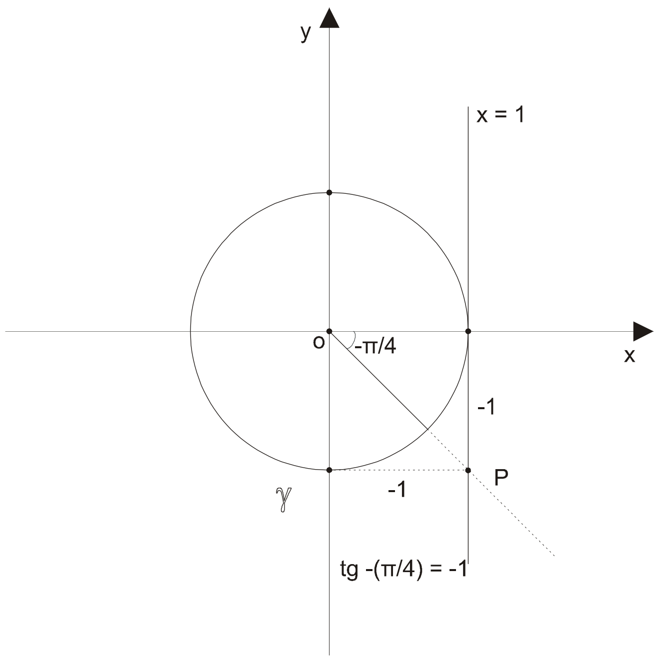
Cominciamo con $tg\frac{\pi}{4}$: è positivo quindi lo possiamo interpretare come l'ampiezza di un angolo espresso in radianti. L'angolo di $\frac{\pi}{4}$ divide in due parti uguali l'angolo retto.

Disegniamo la circonferenza trigonometrica e la retta di equazione $x=1$.



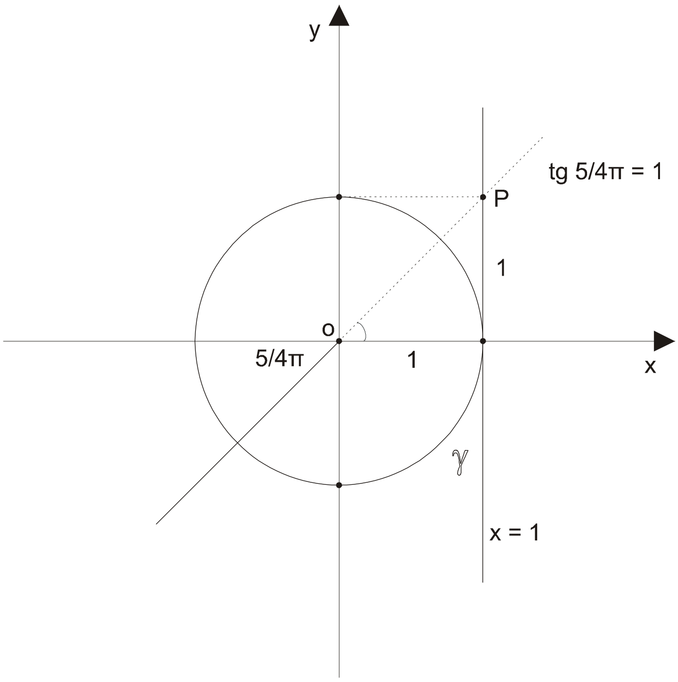
Esse si intersecano in un punto *P*.
Si tratta di determinare l'ordinata di questo punto.
Notiamo che il triangolo formato dai semiassi dell'angolo e dalla retta è isoscele e rettangolo.
La base ha lunghezza unitaria perchè per ipotesi la circonferenza ha raggio 1.
Siccome il triangolo è isoscele anche il cateto verticale ha lunghezza unitaria, e l'ordinata di *P* dunque è *1* per cui la tangente di $\frac{\pi}{4}=1$.

Passiamo a $tg\left(-\frac{\pi}{4}\right)$. Siccome è negativo, si considera un angolo di $+\frac{\pi}{4}$, ottenuto però partendo dal semiasse delle *x* positive.



Ruotando in senso orario il $\frac{\pi}{4}$, si ottiene la semiretta simmetrica di quella di $tg\frac{\pi}{4}$ per ovvie ragioni; si va ad individuare un punto *P* di intersezione con la retta $x=1$ la cui ordinata è -1, quindi si può concludere che $tg\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-1$

Passiamo a $tg\frac{5}{4}\pi$. Si parte dal semiasse delle *x* positive e lo si ruota di $\frac{5}{4}\pi$.



Per definizione $\pi=180°$,ovvero $\frac{4}{4}\pi$ è l'angolo piatto, quindi $\frac{5}{4}\pi$ si ottiene aggiungendo all'angolo piatto $\frac{1}{4}\pi$, così otteniamo la seconda semiretta che è l'angolo di $\frac{5}{4}\pi$.

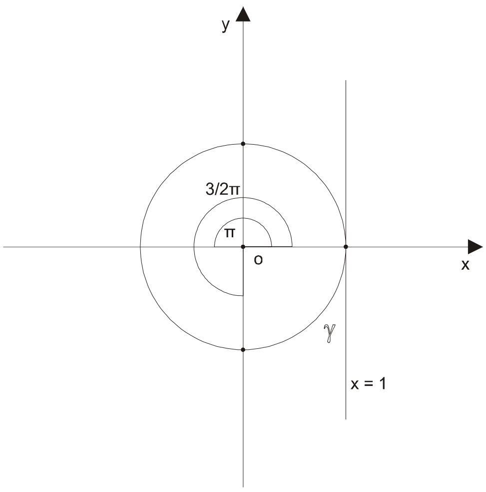
La semiretta non interseca la retta $x=1$, ma il suo prolungamento la interseca nel punto *P*, la cui coordinata è la tangente di *P*, questo ci permette di dire che la $tg\frac{5}{4}\pi = 1$.

Ricordiamo che per qualunque angolo α espresso in gradi si può trovare il corrispondente valore β in radianti e viceversa da radianti in gradi sessagesimali.

Deve essere positivo se si vuole che si possa dare un'interpretazione geometrica nel senso classico del termine, mentre ai fini della definizione delle funzioni trigonometriche si parte da un numero reale che può anche essere negativo, e se è positivo lo si interpreta con un angolo, se è negativo si prende il suo valore assoluto e lo si interpreta con un angolo, però la costruzione si fa ruotando in senso orario.

Passiamo a $tg\frac{3}{2}\pi$. Supponiamo che la differenza $t-\frac{\pi}{2}$ non sia multiplo di π. Poniamo in questo caso $t=\frac{3}{2}\pi$, la differenza $t-\frac{\pi}{2}$ è uguale $\frac{3}{2}\pi-\frac{\pi}{2}=2\cdot\frac{\pi}{2}=\pi$, la differenza $t-\frac{\pi}{2}$ è un multiplo perchè è uguale a π , quindi $tg\frac{3}{2}\pi$ non è definita perchè non interseca la retta.

Facciamo una interpretazione geometrica di questo fatto.

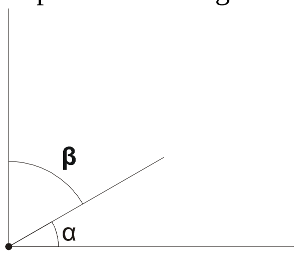


Disegniamo la circonferenza trigonometrica e la retta $x=1$, interpretiamo i $\frac{3}{2}\pi$ come un angolo positivo, perciò partiamo dal semiasse delle *x* positive, ruotiamo in senso antiorario di $\frac{3}{2}\pi$, ma π è l'angolo piatto e $\frac{\pi}{2}$ l'angolo retto, quindi la somma di essi da $\frac{3}{2}\pi$, dunque la semiretta che si ottiene non interseca la retta $x=1$ e nemmeno il suo prolungamento.

Angoli complementari.
Con riferimento alla circonferenza trigonometrica, consideriamo un angolo α e poi rappresentiamo il suo complementare β.

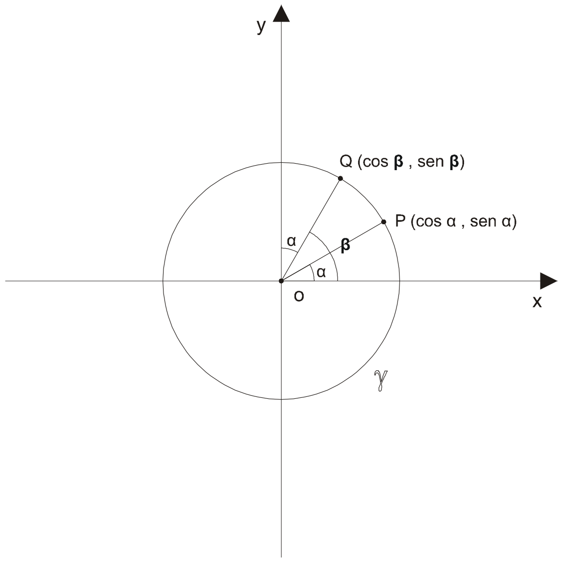
β deve essere fatto in modo tale che se lo sommi con α ti da $\frac{\pi}{2}$: $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$.

In pratica basta togliere dall'angolo retto l'angolo α e così si costruisce β.



Se rappresentiamo tale somma secondo la geometria elementare otteniamo il grafico a sinistra, dove gli angoli stanno uno vicino all'altro in modo tale da riempire l'angolo retto.

La somma degli angoli complementari è l'angolo retto, e nella circonferenza trigonometrica sono collocati in modo tale che una semiretta che li delimita sia il semiasse delle x positive.

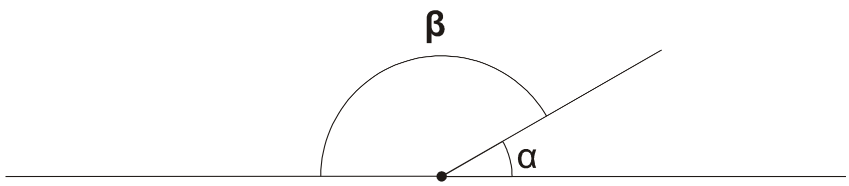


β deve essere fatto in modo tale che se lo sommiamo all'angolo α ci dia $\frac{\pi}{2}$, quindi ci basta togliere dall'angolo retto l'angolo α e così costruiamo l'angolo β.
Questo perchè nella circonferenza trigonometrica tutti gli angoli si misurano a partire dal semiasse delle x positive. Quindi sia α sia β incominciano da esso.
Si ricorre all'espediente di disegnare l'angolo β in modo tale che l'angolo che manca per avere un angolo retto sia un angolo uguale ad α.
E' quindi possibile stabilire che $sen\alpha$, che è l'ordinata di P, è uguale a $cos\beta$ che è l'ascissa di β.

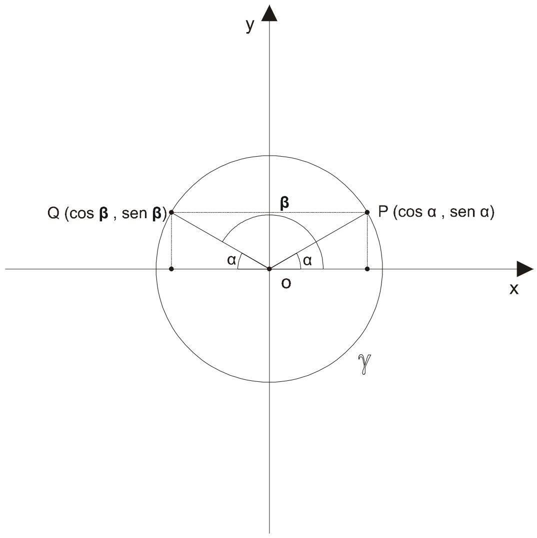
β è $\frac{\pi}{2} - \alpha$, mentre $cos\alpha$ è uguale all'ordinata di Q, quindi è uguale a $sen\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$.

Queste relazioni valgono anche se α è negativo o maggiore dell'angolo retto e legano fra loro seno e coseno di angoli complementari.

Angoli supplementari:
Sono supplementari gli angoli la cui somma è l'angolo piatto, cioè π.
Incominciamo con un angolo α, poi vogliamo rappresentare l'angolo β supplementare di α.
In geometria elementare è facile visualizzare angoli supplementari in modo tale che riempiano l'angolo piatto, infatti l'angolo β incomincia dove finisce l'angolo α , quindi non si può mettere nella circonferenza trigonometrica tale e quale.

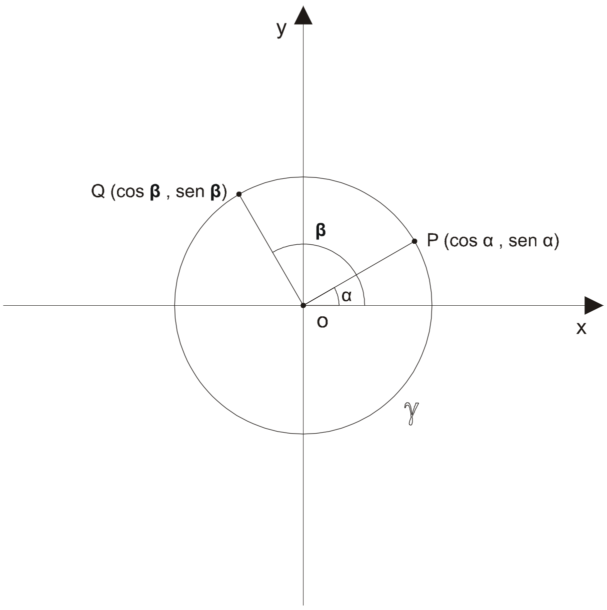


Non è così in trigonometria, dove tutti gli angoli incominciano dal semiasse delle x positive, quindi si procede così: si toglie α dall'angolo piatto e quello che resta è il β, l'angolo supplementare di α .



Dalla definizione di seno e coseno: *senα=sen(π–α)*
mentre *cosα=–cos(π–α)*;
senα e *senβ* sono le ordinate rispettivamente del punto *P=(cosα,senα)* e del punto *Q=(cosβ,senβ)*;
le due ordinate di *P* e di *Q* sono uguali,
ossia *senα* e *senβ* sono uguali tra loro.
L'ascissa di *P* è uguale in valore assoluto ma opposta nel segno all'ascissa di *Q*.

Angoli sfasati di $\frac{\pi}{2}$, quindi $\beta = \alpha + \frac{\pi}{2}$ β. Si studia in elettromagnetismo la propagazione di onde elettromagnetiche in cui i campi vettoriali in gioco sono sfasati di $\frac{\pi}{2}$, quindi lo studio degli angoli sfasati ha interesse nella fisica.

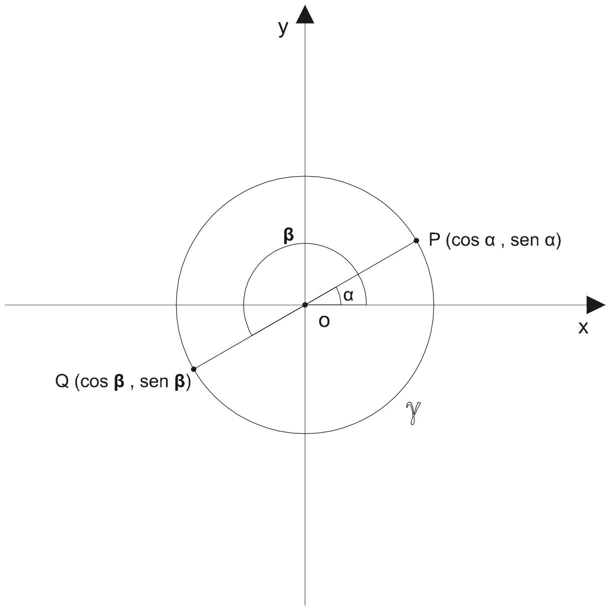


Prendiamo un angolo α
e poi un angolo sfasato di $\frac{\pi}{2}$: $\beta = \left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$.
Chiamiamo β l'angolo retto più l'angolo α.
Consideriamo il punto *P* di coordinate *(cosα, senα)*, e il punto *Q* di coordinate *(cosβ,senβ)*, e osserviamo che l'ordinata di *P* , ossia *senα* è uguale in valore assoluto all'ascissa di *Q* , ma opposta di segno, infatti in figura l'ordinata di *P* è positiva mentre l'ascissa di *Q* è negativa.
Quindi *senα=–cosβ*, ma $\beta = \left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$ dunque $sen\alpha = -cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$.

Per quanto riguarda *cosα* , l'ascissa di *P* , essa è uguale anche nel segno all'ordinata di *Q*, quindi
cosα=senβ ossia $cos\,\alpha = sen\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$.

Queste sono le formule che legano tra loro seni e coseni di angoli sfasati di $\frac{\pi}{2}$.

Angoli sfasati di π , quindi $\beta = (\alpha + \pi)$.
Partiamo da un angolo α al quale aggiungiamo l'angolo piatto e otteniamo l'angolo in figura.



Quindi ci ritroviamo
con il punto *P* di coordinate *(cosα,senα)*
e il punto *Q* di coordinate *(cosβ,senβ)*.
Vediamo che legame intercorre tra questi valori.
Per evidenti ragioni di simmetria risulta che
senα, ossia l'ordinata di *P* è opposta rispetto all'ordinata di *Q*,
quindi è uguale a *–senβ* con $\beta = (\alpha + \pi)$,
mentre *cosα*, l'ascissa di *P*, è opposta rispetto all'ascissa di *Q*,
quindi è uguale a *–cosβ* con $\beta = (\alpha + \pi)$.

Queste formule legano tra loro angoli sfasati di π:

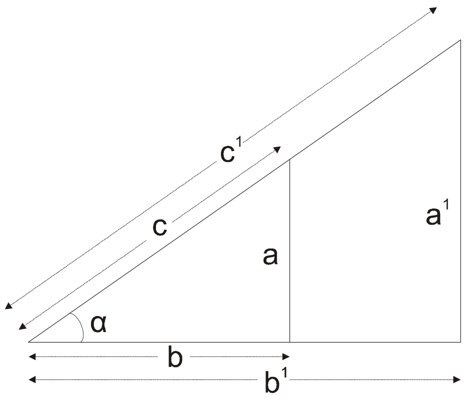
$$sen\alpha = -sen(\alpha + \pi);\ cos\,\alpha = -cos(\alpha + \pi)$$

Risoluzione dei triangoli rettangoli.

Applicazione: decomposizione di una forza lungo due direzioni perpendicolari.

Applicazione alla risoluzione dei triangoli rettangoli.

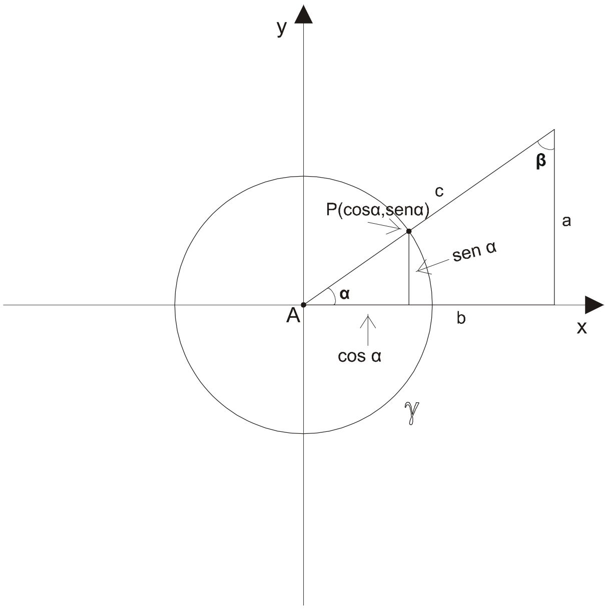
Premessa: consideriamo due triangoli rettangoli e simili.
Li disegniamo uno dentro l'altro; essi sono simili perchè hanno un angolo che chiamiamo α in comune e gli altri uguali; poi chiamiamo *a* il cateto opposto appartenente al triangolo piccolo, e a^1 quello del triangolo più grande, chiamiamo *b* e b^1 i cateti orizzontali e *c* e c^1 le ipotenuse.



Dal teorema di Talete segue che il rapporto: $\frac{a}{c} = \frac{a^1}{c^1}$ e anche il rapporto $\frac{b}{c} = \frac{b^1}{c^1}$ e infine $\frac{a}{b} = \frac{a^1}{b^1}$ ossia hanno i lati in proporzione perchè sono simili.

Questi rapporti dipendono dall'angolo α ma non dalla grandezza del triangolo, cioè sia che prendiamo un triangolo più grande sia che lo prendiamo più piccolo i valori di questi rapporti non cambiano.

Quindi se prendiamo un triangolo rettangolo qualunque di cui un angolo vale α e disegniamo una circonferenza trigonometrica con centro coincidente con il vertice *A* di tale triangolo, e poi posizioniamo il semiasse delle *x* positive sul cateto *b* , allora l'ipotenusa *c*, o il suo prolungamento, interseca la circonferenza trigonometrica nel punto *P* di coordinate *(cosα,senα)*.

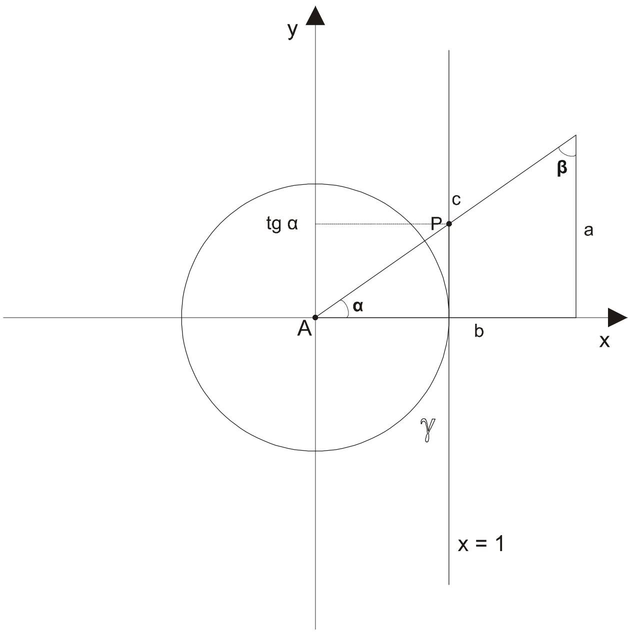


Sfruttando la premessa relativa alla similitudine tra i triangoli considerati, possiamo dire che $\frac{a}{c} = \frac{a^1}{c^1} = sen\alpha$,
ossia il cateto verticale diviso l'ipotenusa del triangolo piccolo (che ha valore unitario perchè coincide con il raggio della circonferenza trigonometrica), è uguale a $\frac{a}{c} = \frac{sen\alpha}{1} \rightarrow a = c \cdot sen\alpha$,
cioè in un rettangolo rettangolo qualunque, la lunghezza di un qualunque cateto è uguale al prodotto della lunghezza dell'ipotenusa per il seno dell'angolo opposto al cateto considerato.
Quindi se consideriamo il cateto *b* avremo $b = c \cdot sen\beta$.

Inoltre α e β sono complementari dunque la loro somma è $\frac{\pi}{2}$ e quindi le funzioni trigonometriche di α e β sono legate tra loro nella maniera che abbiamo visto, e quindi dalla prima formula si trova $a = c \cdot cos\,\beta$ e dalla seconda formula si trova $b = c \cdot cos\,\alpha$.
Quindi in un qualunque triangolo rettangolo un qualunque cateto si ottiene moltiplicando l'ipotenusa per il coseno dell'angolo adiacente (l'angolo β è adiacente al cateto *a*).

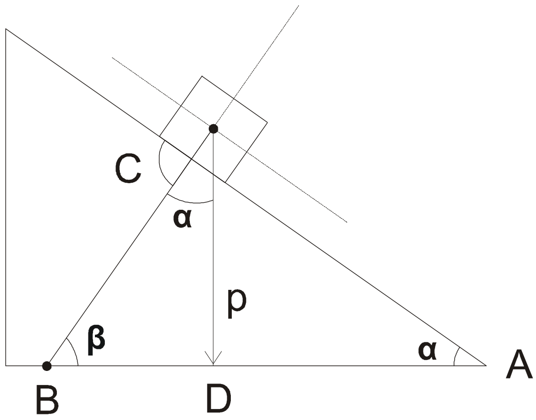
Queste sono le formule fondamentali per risolvere un triangolo rettangolo.

Prendo un triangolo rettangolo qualunque, chiamo i cateti *a* e *b* , e l'ipotenusa *c*.

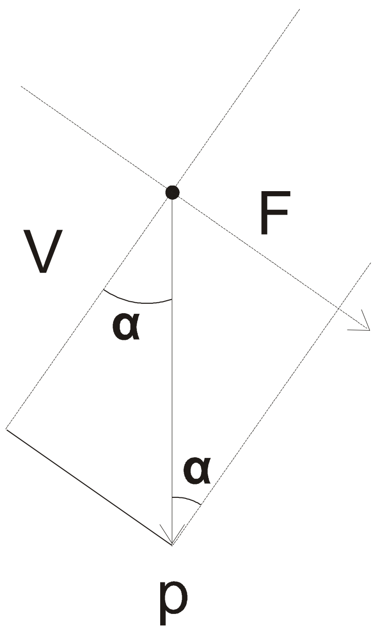


Nel vertice *A* metto il centro della circonferenza trigonometrica, lungo il cateto *b* metto il semiasse delle *x* positive, poi aggiungo la retta *x=1* (tangente di α), e costruisco il punto *P* nella definizione della tangente trigonometrica, la quale tangente è l'ordinata del punto *P* , intersezione con la retta *x=1* della semiretta di costruzione, cioè la tangente di α.
Ottengo due triangoli simili dunque posso scrivere la proporzione: $\frac{a}{b} = \frac{tg\alpha}{catetoorizzontale}$, ma il cateto orizzontale è il raggio di valore unitario della circonferenza trigonometrica, quindi $\frac{a}{b} = \frac{tg\alpha}{1} \rightarrow a = b \cdot tg\alpha$. In un triangolo rettangolo qualunque un cateto si si si può esprimere come il prodotto dell'altro cateto per la tangente dell'angolo opposto, il cateto *a* è il prodotto dell'altro cateto *b* per la tangente dell'angolo α opposto (α è l'angolo opposto ad *a*).
Scambiando i valori dei cateti il discorso non cambia: $b = a \cdot tg\beta$, (β è l'angolo opposto a *b*).

Applicazione dell'applicazione.
Abbiamo applicato la definizione delle funzioni trigonometriche alla risoluzione, come si suol dire, di un triangolo rettangolo qualunque.
La risoluzione di un triangolo consiste nella determinazione di tutti i suoi lati e i suoi angoli a partire da alcuni di essi.
Le formule studiate permettono di risolvere il triangolo rettangolo; noti alcuni elementi si possono determinare tutti gli altri. E' un'applicazione accademica.

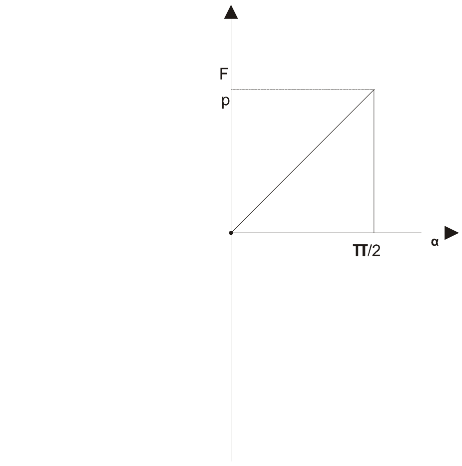


Ora facciamo l'applicazione di una applicazione: la determinazione delle componenti di una forza.
La classica applicazione è lo studio di un corpo posto su un piano inclinato, soggetto alla forza peso.
Conviene collocare un sistema di riferimento che ci permette di decomporre la forza peso *p* in due componenti la cui somma, con la regola del parallelogramma, restituisce *p*, però una delle due componenti, essendo *normale* al piano inclinato, viene neutralizzata dalla *reazione vincolare*. Opposta alla componente *normale* c'è la *reazione vincolare*, quella che rimane è la *forza efficace* responsabile del trascinamento a valle del corpo in figura, mentre l'altra viene neutralizzata dal fatto che il corpo sta sul piano inclinato, dunque non compie alcun lavoro e non contribuisce allo spostamento del grave verso il basso perchè viene annullata dalla forza opposta dal vincolo (dal piano inclinato).
Noto *p* (supponiamo di conoscere il peso del corpo), vogliamo determinare la forza efficace della forza peso, cioè quella parallela al piano inclinato.
L'angolo β è complementare di α.
Vogliamo decomporre la forza peso *p* in due componenti che siano una perpendicolare e una parallela al piano inclinato.
Prendiamo la perpendicolare al piano inclinato, essa forma con il piano inclinato un angolo retto.
Otteniamo il triangolo rettangolo *ABC*.
Chiamiamo β l'angolo *ABC* che è complementare di α *(BAC)*.
Siccome la somma degli angoli interni è π la loro somma è $\frac{\pi}{2}$.
Prolunghiamo il vettore portapeso e costruiamo il triangolo rettangolo *BDC*.
Quindi abbiamo la forza peso, e poi abbiamo la direzione normale al piano inclinato che forma con essa un angolo α, lo stesso angolo che determina l'inclinazione del piano inclinato.
Per trovare la componente di *p* nella direzione normale basta costruire un triangolo rettangolo.

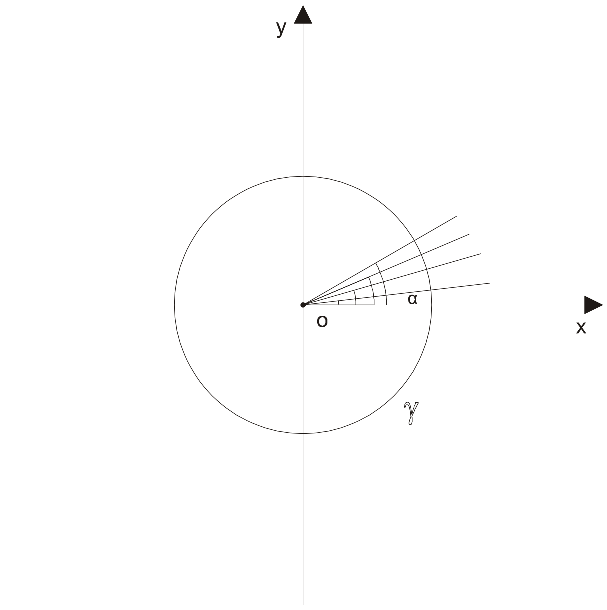


Chiamiamo $\overline{V}$ il vettore (componente normale); il modulo di $\left|\overline{V}\right|$ si ricava dal modulo di $\left|\overline{p}\right|$ (ipotenusa) per il coseno dell'angolo adiacente α: $\left|\overline{V}\right| = \left|\overline{p}\right| \cdot cos\,\alpha$; invece la forza efficace cioè quella che agisce parallelamente al piano inclinato, che chiamiamo $\overline{F}$ è uguale (gli angoli α nella figura a sinistra sono uguali perchè sono alterni interni) $\left|\overline{V}\right| = \left|\overline{p}\right| \cdot sen\alpha$.
Ecco dunque l'intensità della forza efficace e di quella compensata e neutralizzata dalla reazione vincolare.
Si possono fare delle controprove o delle interpretazioni geometriche di queste formule così ottenute , cioè si può dire : fermo restando il peso messo sul piano inclinato, cosa succede inclinando di più o di meno?
Se aumento l'inclinazione, $\overline{F}$ deve aumentare e $\overline{V}$ diminuire, se invece lo metto in orizzontale , ossia se $\alpha=0$, succede che $\overline{F}=0$ mentre $\overline{V}$ diventa uguale $\left|\overline{p}\right|$, perchè nella circonferenza trigonometrica le coordinate del

punto p diventano *(1,0)* dunque se $\alpha=0$ per definizione trovo $cos0=1$, mentre $sen0=0$,quindi quando il piano è orizzontale $\overline{F}$ è nulla.
Quindi la controprova ha dato esito positivo.



Possiamo fare un'interpretazione grafica. Mettiamo α sull'asse delle ascisse e sull'asse delle ordinate mettiamo $\overline{F}$ o $\overline{V}$ (a piacere) o entrambe. Per esempio mettiamo $\overline{F}$ (modulo della forza efficace $\overline{F}$). Parte una costante, ammettiamo che p sia una costante, come variabile indipendente prendiamo α e quello che conta sono *seno* e *coseno* di α. Abbiamo bisogno da una parte della circonferenza trigonometrica e dall'altra di un piano cartesiano.



Cominciamo da valori piccolissimi di α. La forza implicata risulta piccolissima. Se $\alpha=0$ anche $F=0$. Se α è piccolo anche F risulta piccola, quindi il grafico della funzione F dovrebbe comportarsi così. Man mano che α aumenta anche il seno di α aumenta fino ad assumere il valore *1*, quindi ci aspettiamo una linea che cresce fino a quando α è $\frac{\pi}{2}$ (l'angolo retto), così si raggiunge il valore massimo che è p (modulo di). Resta da determinare se la linea deve essere rettilinea o se si deve incurvare verso l'alto o verso il basso. Per determinarla ci si serve del calccolo differenziale.