Esercizi sul grafico di funzioni: $\sqrt{x^2}$; $\left(\sqrt{x}\right)^2$; $sen\frac{x}{2}$; e sul teorema del coseno.

Lunghezza di una corda.
Esercizi sulla equazione della circonferenza centrata in un generico punto $(x_0, y_0) \in \Re$.
Il prodotto di una funzione pari per una dispari è dispari.

Esercizi:

1. Determinare l'insieme di definizione ed il grafico delle funzioni: $f(x) = \sqrt{x^2}$; $g(x) = \left(\sqrt{x}\right)^2$; $h(x) = sen\frac{x}{2}$.
2. Determinare la lunghezza della corda sottesa da un angolo $\alpha = \frac{\pi}{6}$ a in una circonferenza di $R = 3$.
3. Determinare il coseno dell'angolo γ che sottende una corda di lunghezza $c = 4$ nella circonferenza di raggio $R = 3$.

Risoluzione del primo quesito: determinare l'insieme di definizione e il grafico delle funzioni $f(x) = \sqrt{x^2}$.
Prima di tutto dobbiamo rispondere alla domanda “quali valori possiamo assegnare alla variabile *x*?”
Possiamo rispondere dicendo che possiamo dare alla *x* qualunque valore reale, dopo si dovrà determinare il quadrato di quel numero, moltiplicandolo per se stesso, quindi calcolare la radice quadrata del valore ottenuto. Per trovare la radice quadrata del valore *x* è necessario seguire i seguenti punti:

a. prendere *x*;
b. trovare x^2 ;
c. eseguire la $\sqrt{x^2}$.

Esempio:

a. $x = 3$;
b. $x^2 = 9$;
c. $\sqrt{x^2} = 3$.

Quanto appena detto nell’esempio risulta vero per qualunque numero reale. Vedi esempio seguente:

a. $x = -2$;
b. $x^2 = 4$;
c. $\sqrt{x^2} = 2$.

Osserviamo che il procedimento si può portare a termine in entrambi i casi, nonostante nel secondo esempio, il valore iniziale della *x* fosse negativo. Constatiamo anche che, nel secondo esempio, il risultato che otteniamo è diverso, cioè *x* cambiato di segno.

Possiamo quindi verificare che per $x = 3$ risulta $\sqrt{x^2} = x$, mentre per $x = -2$ risulta $\sqrt{x^2} = -x$. La domanda è: qual è l'insieme di definizione di questa funzione?
Siccome possiamo dare tutti i valori reali alla *x*, non soltanto -2 e 3, l'insieme di definizione della funzione $f(x) = \sqrt{x^2}$, è definito dall'insieme di tutti numeri reali. Definiamo, per coerenza, anche l'insieme di definizione delle altre funzioni del quesito. Definiamo $g(x) = \left(\sqrt{x}\right)^2$: quali valori posso dare alla variabile alla *x* ?
Per quanto detto: prendo un numero reale, lo metto al posto della *x* quindi eseguio i calcoli. Il primo calcolo che si deve fare in questo caso è la radice quadrata del valore che ho scelto. La radice quadrata richiede che l'argomento sia NON negativo. Posso quindi scrivere che la radice quadrata di *t*, che posso indicare come $\sqrt{t}$, richiede che *t*, l'argomento della radice, sia positivo (posso scrivere anche $t \geq 0$) ovvero maggiore di zero o eventualmente uguale a zero.

Questo è il primo problema che incontriamo nello studio dell'insieme di definizione della funzione $g(x)=(\sqrt{x})^2$:

a. prendo un numero reale *x*;

b. calcolo la $\sqrt{x}$, quindi il valore della *x* deve essere maggiore o uguale a zero;

quindi l'insieme di definizione della funzione $g(x)=(\sqrt{x})^2$ è l'insieme di tutti i numeri reali ≥ 0. Questa è la condizione che deve essere soddisfatta per poter portare avanti il calcolo di $g(x)=(\sqrt{x})^2$. Esempio:

a. prendo $x \rightarrow x=3$;

b. trovo $\sqrt{x} \rightarrow \sqrt{3}=1{,}7321$;

c. calcolo $(\sqrt{x})^2 \rightarrow (\sqrt{3})^2=(1{,}7321)^2$;

per $x=-2$ x non esiste $\sqrt{-2}$ nell'insieme dei numeri reali, quindi non troviamo alcuna soluzione. Si deduce che -2 non esiste nell'insieme di definizione della funzione $g(x)=(\sqrt{x})^2$.

Definiamo $h(x)=sen\frac{x}{2}$: quali valori posso dare alla variabile alla *x*?

Per fare il $sen\frac{x}{2}$ seguo i passi sottoindicati:

a. prendo *x*;

b. trovo $\frac{x}{2}$;

c. eseguo $sen\frac{x}{2}$.

L'insieme di definizione di questa funzione è l'insieme dei numeri reali.
Passiamo ora ai grafici delle funzioni.

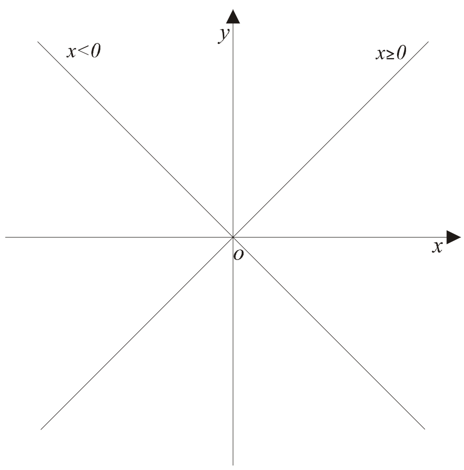
Funzione $f(x)=\sqrt{x^2}$ *;* osserviamo $f(x)=\sqrt{x^2}$ il cui dominio è l'insieme di tutti i numeri reali. Quindi:

a. Se $x \in \Re$ e $x \geq 0$, allora $\sqrt{x^2}=x$.

b. Se $x \in \Re$ e $x<0$, allora $\sqrt{x^2}=-x$, cioè l'opposto di *x*.

Questa osservazione ci permette di disegnare rapidamente il grafico della funzione. Sappiamo disegnare le rette di equazione $y=x$ e $y=-x$.

La funzione $f(x)=\sqrt{x^2}$ coincide con la funzione $y=x$ per $x>0$ e con $y=-x$ per $x<0$.

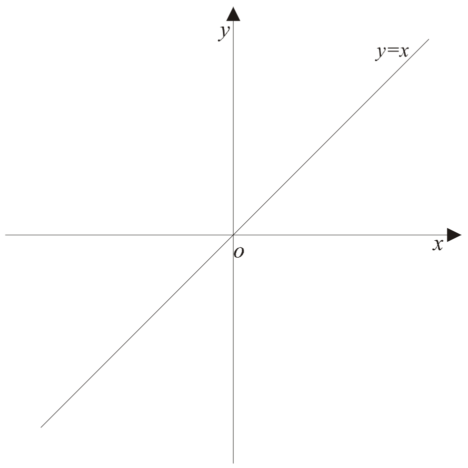


La retta con $x \geq 0$ è la bisettrice del primo e terzo quadrante, la retta con $x<0$ è la bisettrice del secondo e del quarto quadrante. Consideriamo solo il primo e il quarto quadrante. Vediamo che il grafico sarà come una spezzata, l'unione di due semirette uscenti dall'origine e inclinate di 45° rispetto all'asse delle *x*.

Si chiama valore assoluto di *x* la quantità che si indica $|x|$, che vale x se $x \geq 0$ e $-x$ se $x<0$. Dunque $\sqrt{x^2}=|x|$ per ogni *x* reale $(x \in \Re)$.

Funzione $g(x)=\left(\sqrt{x}\right)^2$.

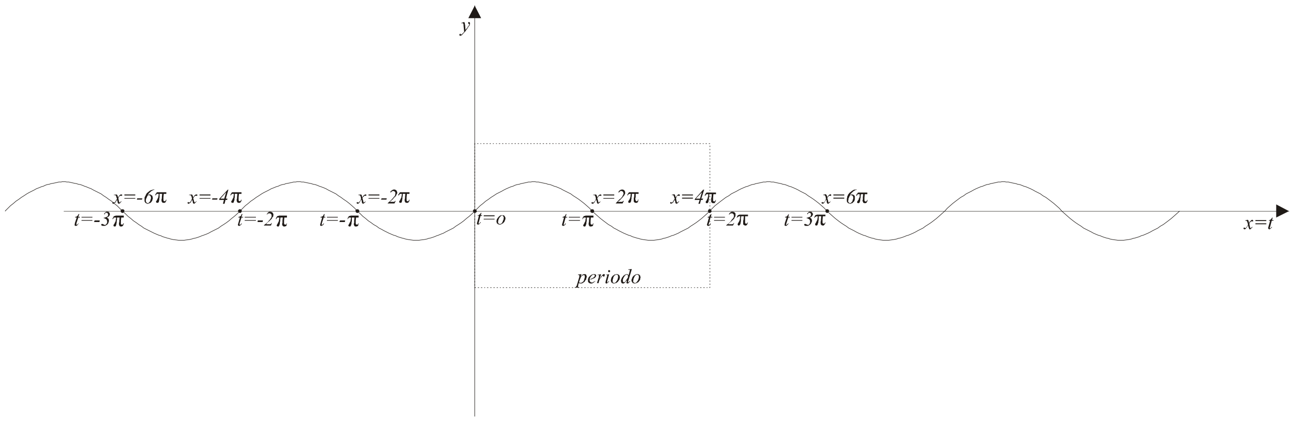
L'insieme di definizione della funzione $g(x)=\left(\sqrt{x}\right)^2$ è l'insieme delle $x \geq 0$.
Dalla definizione di $\sqrt{x}$ sappiamo che $\sqrt{x}$ è quell'unico numero non negativo il cui quadrato è x e si suppone che $x \geq 0$.
Conseguentemente segue che $\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$ per $x \geq 0$. Per quanto detto possiamo affermare che $g(x)=x$ per $x \geq 0$.
Possiamo facilmente disegnare il grafico: basta prendere la retta $y = x$ il cui grafico è la bisettrice del primo e terzo quadrante, come riportato nel seguente grafico:



Il grafico della funzione $g(x)$ è la semiretta uscente dall'origine nel primo quadrante.

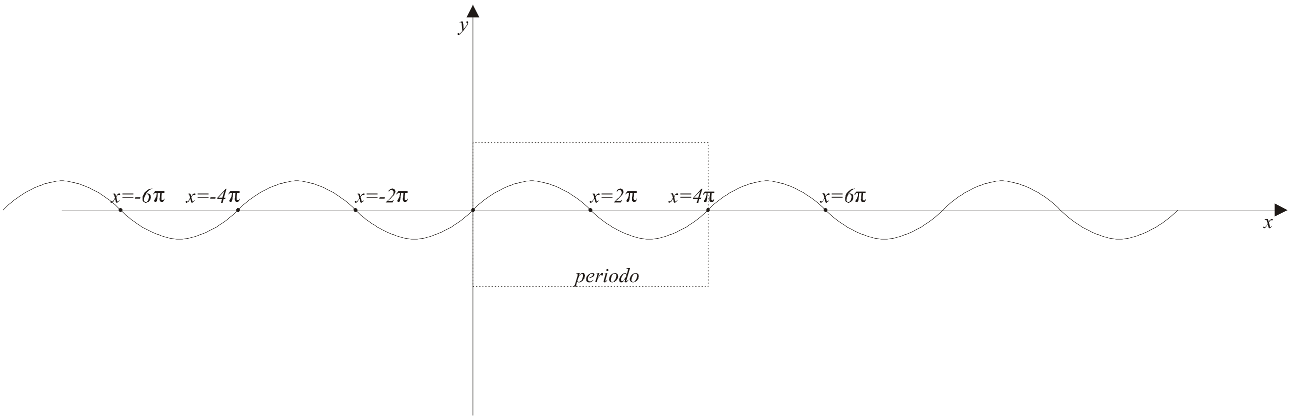
Funzione $h(x)= sen\dfrac{x}{2}$ h.

Per la risoluzione di questa funzione possiamo eseguire un cambiamento di variabile sostituendo $t=\dfrac{x}{2}$; ricordiamo il grafico di $sen(t)$:

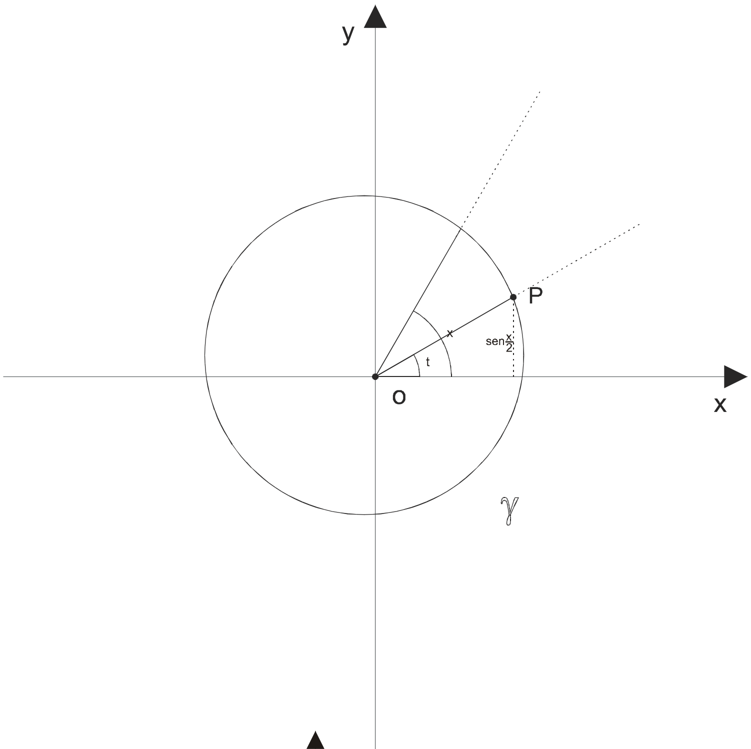


L'asse delle x coincide con l'asse delle t. Ora abbiamo che $x=\dfrac{t}{2}$, quindi dove $t=\pi$ avremo $x=2\pi$ perchè $x=2t$, di conseguenza dove $t=2\pi$ avremo $x=4\pi$ e dove $t=3\pi$ avremo $x=6\pi$; nella parte negativa di x, seguendo il medesimo ragionamento, avremo $x=-2\pi$, $x=-4\pi$, $x=-6\pi$. Quello appena descritto, e riportato sopra, è il grafico di $sen\dfrac{x}{2}$.

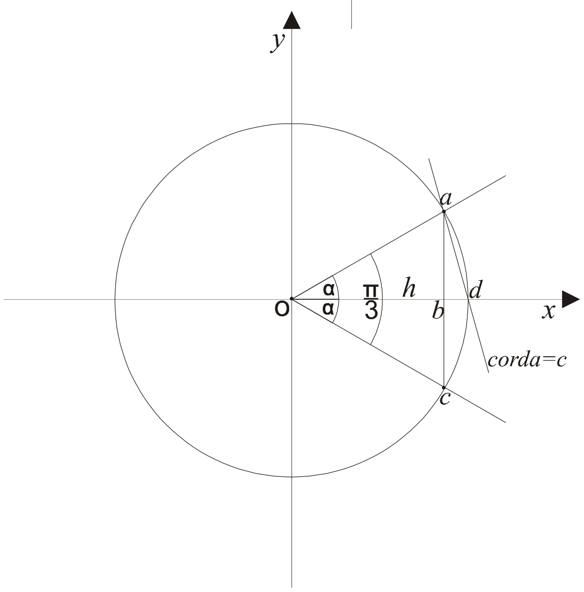
Ora, eliminando l’asse delle *t* usato per la costruzione, otteniamo il seguente grafico:



Il periodo che è da 0 a 2π per $sen(t)$, diventa 4π per $sen\frac{x}{2}$. Dal punto di vista qualitativo i due grafici sono uguali. Possiamo verificare che sia così ricorrendo alla definizione di $sen(t)$, quindi



prendo un angolo *x* lo divido per *2* e ottengo *t* poi determino il punto *P* la cui coordinata è $senx$ come riportato sul disegno a sinistra. Si capisce quindi che quando $x = 0$ anche la metà è *0* e il sen è uguale a *0*.Quindi la linea esce dall'origine, al crescere di *x*, quando *x* arriva a $\frac{\pi}{2}$, la metà è $\frac{\pi}{4}$ il cui corrispondente seno è $sen\frac{\pi}{4}$. Aumento ancora *x* che arriva a π. Quando $x = \pi$, la metà $\frac{x}{2}$ vale $\frac{\pi}{2}$ e $sen\frac{\pi}{2} = 1$ quindi si verifica che i calcoli precedentemente fatti siano corretti. Concludendo, il fattore $\frac{1}{2}$ che c’era nella funzione ha sostanzialmente provocato il raddoppio del periodo.



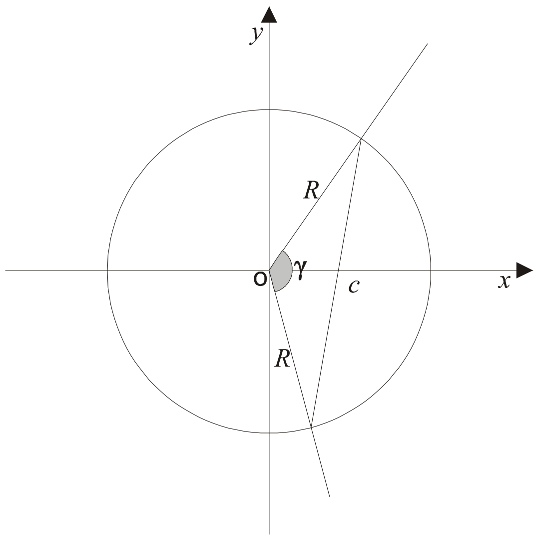
Risoluzione del secondo quesito: determinare la lunghezza della corda sottesa da un angolo $\alpha = \frac{\pi}{6}$ in una circonferenza di $R = 3$. Sappiamo che $\frac{\pi}{6}$ equivale a 30°, quindi $\alpha = 30°$. Disegniamo l'angolo $\alpha = 30°$ di cui dobbiamo trovare la lunghezza della corda indicata sul disegno. Possiamo risolvere il problema applicando il teorema di Pitagora infatti possiamo disegnare un angolo $\alpha = 30°$ (come riportato sotto l'asse x) ottenendo così l’angolo notevole del triangolo equilatero, cioè $\frac{\pi}{3}$. Risulta quindi che il triangolo $a\hat{o}c$ è equilatero, cioè tutti i lati sono della stessa lunghezza, ovvero *3*. Tracciamo l'altezza del triangolo e la chiamiamo *h*; sappiamo che $h=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot l$, in questo caso $l=R$; sostituiamo: $h=\frac{3\cdot\sqrt{3}}{2}$. Chiamiamo la corda con la lettera *c* e applichiamo il teorema di Pitagora, quindi avremo:

$$c=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(3-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2}\rightarrow c=3\sqrt{\frac{1}{4}+\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\rightarrow c=3\sqrt{\frac{1}{4}+\left(\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}{4}\right)}\rightarrow c=\frac{3}{2}\sqrt{8-4\sqrt{3}}\rightarrow c=\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

Questa è la soluzione trovata con la geometria euclidea senza l'uso della trigonometria.
Applichiamo ora la trigonometria. Usiamo il teorema del coseno che vale anche per un triangolo qualunque:
“il lato *c* è uguale alla radice quadrata del lato al quadrato più l'altro lato al quadrato meno due volte lato per lato per il *cos* dell’angolo opposto. In forma matematica:
$c=\sqrt{a^2+b^2-2(a\cdot b)\cdot\cos\gamma}$. Questa è una applicazione del teorema del coseno che ci permette di trovare un qualunque lato di un qualunque triangolo conoscendo semplicemente due lati e il valore dell'angolo opposto ad essi. Ovviamente questa tecnica funziona se abbiamo un dispositivo che ci permette di calcolare il coseno. Il $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, quindi, per quanto detto sopra avremo:

$$c=\sqrt{3^2+3^2-2(3\cdot 3)\cdot\cos\frac{\pi}{6}}\rightarrow c=3\sqrt{2-2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}\rightarrow c=\sqrt{2-\sqrt{3}}\ .$$

Risoluzione del terzo quesito: determinare il coseno dell’angolo γ che sottende una corda di lunghezza $c=4$ nella circonferenza di raggio $R=3$. Possiamo utilizzare il teorema del coseno che ci dice che: $c=\sqrt{a^2+b^2-2(a\cdot b)\cdot\cos\gamma}$.



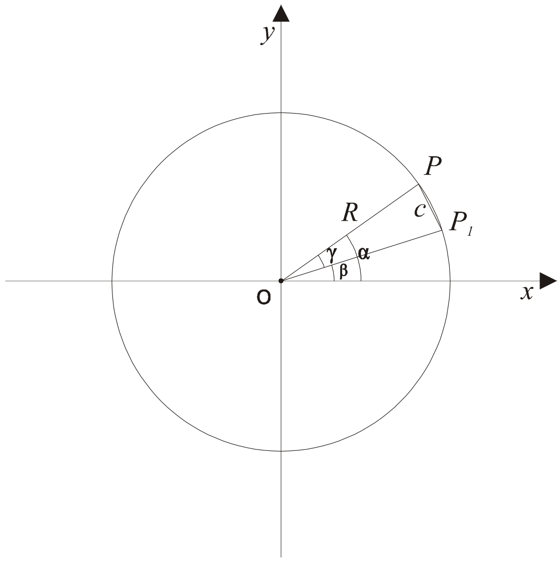
Sostituendo in $c=\sqrt{a^2+b^2-2(a\cdot b)\cdot\cos\gamma}$ i valori numerici, otteniamo:
$c=\sqrt{9+9-2(9\cos\gamma)}=3\sqrt{2-2\cos\gamma}$; quindi, sostituendo ancora: $3\sqrt{2-2\cos\gamma}=4$; per eliminare la radice quadrata, eleviamo tutti i termini al quadrato:
$3^2\left(\sqrt{2-2\cos\gamma}\right)^2=4^2\rightarrow 9(2-2\cos\gamma)=16$, svolgiamo i calcoli: $9(2-2\cos\gamma)=16\rightarrow 18-18\cos\gamma=16$, cambiamo segno e otteniamo: $18\cos\gamma=18-16$ ovvero, semplificando: $\cos\gamma=\frac{1}{9}$. In questo esempio abbiamo applicato la proprietà appena studiata, cioè:
$\left(\sqrt{t}\right)^2=t\geq 0$. Ne consegue quindi: $2-2\cos\gamma\geq 0$.
Facciamo quindi il quadrato di una radice ottenendo il radicando della radice; questo ragionamento è corretto finchè il radicando è NON negativo. Nell’esempio il radicando è positivo in quanto $\cos\gamma$ non può avere un valore superiore a *1*. $2-2\cos\gamma\geq 0$, infatti portando il coseno dall’altra parte abbiamo: $2\geq 2\cos\gamma\rightarrow\cos\gamma\leq 1$. Il discorso fatto fino ad ora vale in generale; infatti, presa una qualunque circonferenza di raggio *R* e una qualunque corda di lunghezza *C*, chiamiamo γ l’angolo di nostro interesse, ricaviamo $\cos\gamma$ come segue: $C=\sqrt{2R^2-2R^2\cos\gamma}$, quindi eleviamo

al quadrato primo e secondo membro ottenendo: $C^2 = \left(\sqrt{2R^2 - 2R^2 \cos\gamma}\right)^2$, da cui:

$C^2 = 2R^2 - 2R^2 \cos\gamma$ ottenendo così il valore cercato: $\cos\gamma = 1 - \frac{C}{2R^2}$.

La formula appena trovata trova applicazione nello studio delle formule di addizione viste precedentemente. Infatti per dimostrare che vale la relazione $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + sen\alpha sen\beta$ (formula di addizione), possiamo ricavare il $\cos(\alpha - \beta)$ dalla formula appena citata. Infatti avremo $1 - \frac{C}{2R^2}$, dove la circonferenza trigonometrica ha raggio uguale a 1 quindi posso scrivere:

$1 - \frac{C}{2} \rightarrow \cos(\alpha - \beta) = 1 - \frac{C}{2}$.



Ragionando sulla circonferenza trigonometrica, prendiamo due angoli α e β; α è ovviamente l'angolo che inizia dall'asse *x* e comprende β. La differenza è $\alpha - \beta = \gamma$. Dobbiamo trovare il $\cos\alpha$; ciò equivale a dire che dobbiamo trovare il $\cos(\alpha - \beta)$ ovvero $1 - \frac{C}{2}$ dove *C* rappresenta la corda rappresentata sul disegno. Possiamo ricavare *C* dal teorema di Pitagora. Infatti, conoscendo le coordinate degli estremi *P* e P_1 ricaviamo *C*:

$C = \sqrt{(\cos\beta - \cos\alpha)^2 + (sen\beta - sen\alpha)^2}$; ricavando *C* da questa formula e sostituendo il valore nella formula $1 - \frac{C}{2}$ otteniamo il $\cos(\alpha - \beta)$.

ESERCIZI

Consideriamo due funzioni: $p(x)$ e $d(x)$ di cui sappiamo solo che $p(x)$è pari e $d(x)$ è dispari. Stabilire se è pari o dispari la seguente funzione: $p(x) \cdot d(x)$.

Facciamo le seguenti considerazioni: se viene pari vuol dire che $p(-x)$ e $p(x)$sono uguali fra loro, invece abbiamo dei valori dispari quando due valori $d(-x)$ e $d(x)$ sono opposti tra loro. Dobbiamo stabilire se il loro prodotto è pari o dispari. Confrontiamo quindi ciò che si ottiene mettendo $(-x)$al posto di (x).

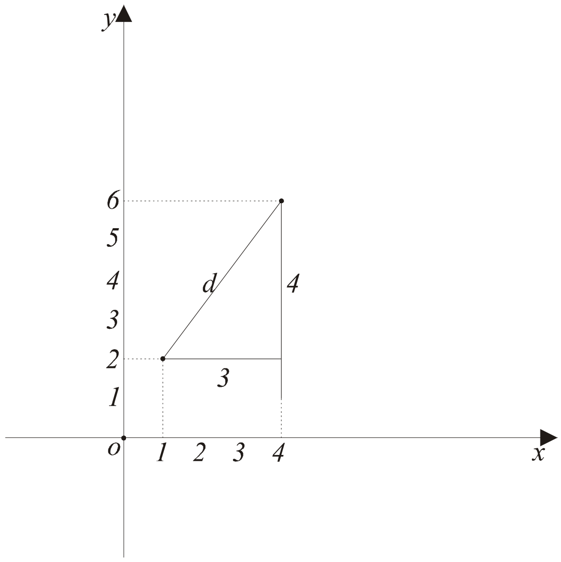
Risolviamo: sostituiamo $(-x)$ al posto di (x) e sfruttiamo le seguenti ipotesi.

Ipotesi: $p(x) = p(-x)$ e $d(-x) = -d(x)$.

In virtù delle ipotesi appena enunciate, possiamo scrivere il prodotto sfruttando prima la parità di p per il primo fattore, quindi scrivendo $p(x)$ senza il meno; mentre per il secondo fattore, quindi per la disparita di *d*, scriviamo $-d(x)$. Si può tranquillamente dire che le due ipotesi sono responsabili dell'uguaglianza: $-p(x) \cdot d(x) = p(-x) \cdot d(-x)$. Il segno meno lo abbiamo messo davanti alla $p(x)$ in quanto abbiamo a che fare con un prodotto quindi possiamo metterlo dove ci pare. Si deduce che sostituendo al posto di (x) il valore $(-x)$ si trova come risultato esattamente l'opposto quindi la funzione $p(x) \cdot d(x)$ risulta essere dispari. Infatti, il prodotto "pari" per "dispari" da un risultato "dispari". Quanto detto sostiene la terminologia di funzione pari e funzione dispari che si comportano esattamente come i numeri pari e i numeri dispari (ovvero, come dicevamo prima, pari per dispari fa dispari).

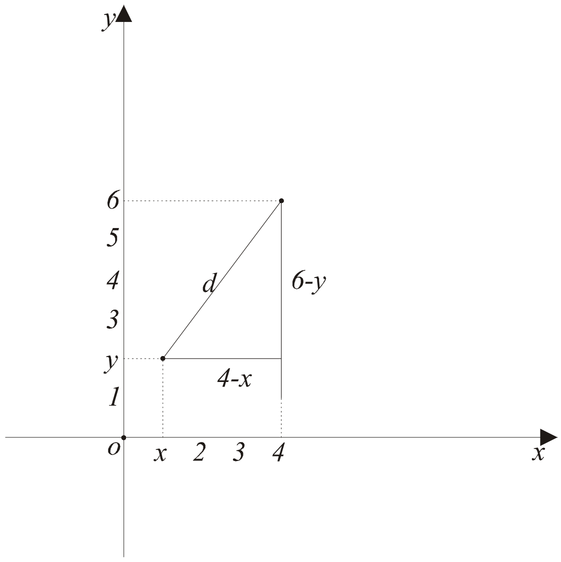
ESERCIZI sulla circonferenza.
Determinare la distanza *d* del punto di coordinate (*1*,*2*) dal punto di coordinate (*4*,*6*).
Determinare la distanza del punto di coordinate generiche (*x*,*y*) dal punto di coordinate (*4*,*6*).
Determinare l'equazione della circonferenza centrata nel punto di coordinate (*4*,*6*) e di raggio $R = 5$.
Determinare l'equazione della circonferenza centrata in (x_0, y_0) e raggio $R > 0$.

SOLUZIONE primo esercizio:
abbiamo i punti di coordinate (*l*,*2*) e (*4*,*6*); per risolvere il quesito utilizziamo il teorema di Pitagora.



Costruiamo quindi un triangolo rettangolo avente come ipotenusa il segmento che unisce i due punti di cui abbiamo le coordinate e i cateti paralleli agli assi cartesiani. Applicando il teorema di Pitagora avremo che la distanza $d = \sqrt{9+16} = 5$.

SOLUZIONE secondo esercizio:



In questo esercizio abbiamo le coordinate (x, y) e $(4,6)$. Avremo, come conseguenza, vedi disegno a lato, che i due cateti avranno rispettivamente le seguenti dimensioni: $(4 - x)$ e $(6 - y)$. Da sottolineare che avremmo potuto avere anche $(x - 4)$ e $(y - 6)$, in quanto poi eleviamotutto al quadrato, infatti:
$d = \sqrt{(x-4)^2 + (y-6)^2}$

SOLUZIONE terzo esercizio:
Determinare l'equazione della circonferenza centrata nel punto di coordinate $(4,6)$ e di raggio $R = 5$. Per trovare l'equazione della circonferenza è necessario trovare l'equazione che deve essere soddisfatta dalle coordinate *x* e *y* su un qualunque punto del piano, in modo tale che la sua distanza dal centro sia *5*. Chiamiamo *d* la distanza di cui sopra quindi avremo: $d = 5$.
Quindi: $d = \sqrt{(x-4)^2 + (y-6)^2} \rightarrow 5 = \sqrt{(x-4)^2 + (y-6)^2} \rightarrow 25 = (x-4)^2 + (y-6)^2$