Formule di prostaferesi.

Riduzione alla tangente dell'angolo metà.

Teorema del coseno.

Identità $1+tg^2t=\dfrac{1}{cos^2 t}$ per $t\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$

Riepilogo

0. Il concetto di funzione
1. Definizione di seno, coseno e tangente
2. Relazione fra seno e coseno di angoli associati, nel senso che possono essere complementari, supplementari, sfasati di $\dfrac{\pi}{2}$ e di π
3. Risoluzone dei triangoli rettangoli
4. Decomposizione di una forza in due componenti ortogonali (perpendicolari tra loro)
5. Prima identità fondamentale della goniometria: $sen^2t+cos^2 t=1$
6. Seconda identità fondamentale della goniometria: $tgt=\dfrac{sent}{cos t}$
7. Formule di addizione
8. Formule di duplicazione
9. Formule di bisezione

Vediamo qualche altra formula frequentemente utilizzata.
Una formula molto semplice è la seguente:
per ogni valore di $t\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ risulta che $1+tg^2t=\dfrac{1}{cos^2 t}$, questa formula discende dalla seconda identità fondamentale della goniometria : $tgt=\dfrac{sent}{cos t}$. Usando la seconda identità fondamentale della goniometria troviamo che $1+tg^2t=1+\left(\dfrac{sent}{cos t}\right)^2$, quindi riducendo questa somma ad una unica frazione otteniamo $1+tg^2t=\dfrac{cos^2 t+sen^2t}{cos^2 t}$. Adesso usiamo anche la prima identità fondamentale della goniometria che dice che $sen^2t+cos^2 t=1$. Quindi al numeratore della frazione possiamo scrivere *1* e dimostriamo la formula che volevamo dimostrare: $1+tg^2t=\dfrac{1}{cos^2 t}$. Adesso richiamiamo le formule di duplicazione: $sen2\alpha=2sen\alpha\cos\alpha$, e $cos 2\alpha=cos^2\alpha-sen^2\alpha$ cos. Usando questa identità appena ricavata, possiamo far si che al secondo membro di queste formule ci sia soltanto la tangente di α, quindi andiamo ad esprimere seno e coseno di α in termini non di seno e coseno di α ma della sola tangente di α.
Prendiamo per esempio la prima formula

$sen2\alpha=2sen\alpha\cos\alpha$, se α è diverso da $\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ allora cosα è diverso da 0:

se $\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ allora $cos\alpha\neq 0$, quindi possiamo dividere e moltiplicare al secondo membro per $cos\alpha$ che è una quantità diversa da *0* senza cambiare il valore del secondo membro; facendo in questo modo troviamo: $sen2\alpha=2\dfrac{sen\alpha}{cos\alpha}cos^2\alpha$; adesso al posto di $\dfrac{sen\alpha}{cos\alpha}$ sfruttiamo la seconda identità fondamentale

della goniometria e scriviamo $tg\alpha$: $sen2\alpha = \frac{2tg\alpha}{\frac{1}{cos^2\alpha}}$ (scrivere moltiplicato $cos^2\alpha$ oppure diviso $\frac{1}{cos^2\alpha}$ è la stessa cosa); a questo punto applico l'identità ricavata poco fa e al posto di $\frac{1}{cos^2\alpha}$ scrivo $1+tg^2\alpha$, ossia: $sen2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha}$. Abbiamo espresso $sen2\alpha$ in termini della sola $tg\alpha$ invece che di seno e coseno di α.
Qualcosa di simile si può fare anche per il $cos2\alpha$. Prendo la seconda formula di duplicazione: $cos\,2\alpha = cos^2\alpha - sen^2\alpha$, e metto in evidenza $cos^2\alpha$ e dentro parentesi mi rimane $1-\frac{sen^2\alpha}{cos^2\alpha}$, $cos\,2\alpha = cos^2\alpha\left(1-\frac{sen^2\alpha}{cos^2\alpha}\right)$; a questo punto uso la seconda identità fondamentale per scrivere tg^2 al posto di $\frac{sen^2}{cos^2}$, quindi: $cos\,2\alpha = \left(\frac{1-tg^2\alpha}{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{cos^2}\alpha}}\right) = \left(\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}\right)$. Di solito queste formule si trovano scritte in quest'altro modo: al posto di 2α scrivo *t*, $sent = \frac{2tg\frac{t}{2}}{1+tg^2\frac{t}{2}}$, e $cos\,t = \frac{1-tg^2\frac{t}{2}}{1+tg^2\frac{t}{2}}$; vengono dette formule di riduzione alla tangente dell'angolo metà (si usano per calcolare certi integrali). Non è necessario imparare a memoria queste formule, basta sapere che ci sono e quando servono si possono reperire facilmente. Altre formule importanti sono le *formule di prostaferesi*, che permettono di esprimere somme e differenze di seni e coseni. Gli angoli che intervengono nelle formule di prostaferesi solitamente si indicano con le lettere *p* e *q* invece che con le lettere α e β, per ragioni legate alla dimostrazione delle formule. Dunque *p* e *q* rappresentano due numeri reali qualunque. Le formule di prostaferesi permettono di dare una espressione di queste somme e differenze di seni e coseni come prodotti di seni e coseni della semisomma e della semidifferenza dei valori di *p* e di *q*. Per ricordarsi le formule di prostaferesi a memoria si può sfruttare un'espediente che consiste per esempio nel memorizzare la frase priva di significato "*cento rose molto meno belle*" e seguire il criterio che laddove si trova una vocale *e* bisogna scrivere seno e quando c'è la vocale *o* bisogna scrivere coseno. Quindi comincio da cento e scrivo seno e coseno, rose coseno e seno, molto coseno e coseno, meno sta proprio per – nella formula, e belle sono due seni. In questo modo si può ricordare a memoria le formule di prostaferesi. Dopo bisogna scriverci la semisomma, cioè il $\frac{p+q}{2}$, e la semidifferenza $\frac{p-q}{2}$, dopodichè bisogna ricordarsi di mettere un coefficiente *2* a tutte le formule, così vengono fuori le formule di prostaferesi, che esprimono somme e differenze di seni e coseni in termini di prodotti di seno e coseno della semisomma e della semidifferenza degli argomenti *p* e *q*.
Somma e differenza di seni:

$$senp + senq = 2sen\frac{p+q}{2}\cdot cos\frac{p-q}{2};\ senp - senq = 2cos\frac{p+q}{2}\cdot cos\frac{p-q}{2};$$

somma e differenza di coseni:

$$cos\,p + cos\,q = 2cos\frac{p+q}{2}\cdot cos\frac{p-q}{2};\ cos\,p - cos\,q = 2sen\frac{p+q}{2}\cdot sen\frac{p-q}{2}.$$

Per ricavare facilmente le formule di prostaferesi conviene partire dalle formule di addizione che adesso ricordiamo: $sen(\alpha+\beta) = sen\alpha\cos\beta + \cos\alpha sen\beta$; $sen(\alpha-\beta) = sen\alpha\cos\beta - \cos\alpha sen\beta$.
Partendo dalle formule di addizione procediamo in questo modo: le sommiamo termine a termine, ossia sommiamo i primi membri tra loro e poi scriviamo uguale la somma dei secondi membri tra di loro;

dopodichè sfrutteremo il fatto che ai secondi membri il termine $\cos\alpha \ \ sen\beta$ è preceduto una volta dal + e una volta dal – quindi si cancella, così facendo troviamo:
$sen(\alpha+\beta)+sen(\alpha-\beta)=2sen\alpha\cos\beta$, questa uguaglianza ci porterà alla prima formula di prostaferesi dopo un cambiamento di variabili. Se al posto di $\alpha+\beta$ scrivo p e al posto di $\alpha-\beta$ scrivo q, la formula appena ricavata diventa la prima formula di prostaferesi. Così facendo al primo membro trovo proprio $sent+senq$; al secondo membro trovo $2sen\alpha\cos\beta$, ma α e β si possono ricavare dal sistema:

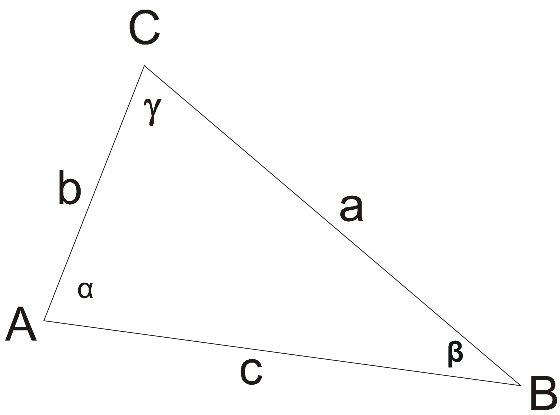
$$\begin{cases}\alpha+\beta=p\\ \alpha-\beta=q\end{cases}$$

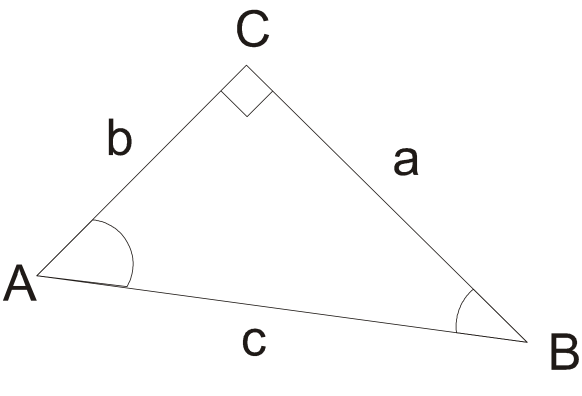
Se per esempio voglio ricavare α basta sommare le due equazioni termine a termine: al primo membro si trova solo 2α perché $+\beta$ e $-\beta$ si cancellano; al secondo membro si trova $p+q$:

$\begin{cases}\alpha+\beta=p\\ \alpha-\beta=q\end{cases}\rightarrow\alpha+\beta+\alpha-\beta=p+q\rightarrow 2\alpha=p+q$, se 2α è uguale a $p+q$ vuol dire che $\alpha=\dfrac{p+q}{2}$.

Resta da ricavare β, e per fare ciò da questo sistema basta sottrarre la seconda formula dalla prima. Sottraendo la seconda formula dalla prima il termine α si cancella, mentre per quanto riguarda β troviamo $+\beta-(-\beta)$, quindi 2 volte β uguale $p-q$, perciò β è uguale a $\dfrac{p-q}{2}$; $\alpha-\beta-(\alpha+\beta)=q-p\rightarrow -2\beta=q-p\rightarrow -\beta=\dfrac{-p+q}{2}\rightarrow\beta=\dfrac{p-q}{2}$. Ma allora α e β sono proprio rispettivamente $\dfrac{p+q}{2}$ e $\dfrac{p-q}{2}$, dunque questa formula è proprio uguale alla prima formula di prostaferesi a meno di un cambiamento delle lettere che entrano in gioco. Adesso ci accingiamo a ricavare la seconda formula di prostaferesi. Ho buone speranze che la seconda formula di prostaferesi si possa ricavare direttamente dalla prima formula cambiando q in $-q$. Vediamo se è vero. Se cambio q in $-q$, $senq$ per la disparità della funzione seno diventa proprio $-senq$. Scrivo i dettagli e introduco una nuova variabile che chiamo t e poniamo $q=-t$ nella prima formula: $senp+senq=2sen\dfrac{p+q}{2}\cdot\cos\dfrac{p-q}{2}$; otteniamo: $senp+sen(-t)=2sen\dfrac{p-t}{2}\cdot\cos\dfrac{p+t}{2}$, quindi dalla prima formula appena dimostrata con questo cambiamento di variabile si trova questa formula. Adesso sfruttiamo la disparità della funzione seno e al posto di $sen(-t)$ scriviamo $-sent$; $senp-sent=2\cos\dfrac{p+t}{2}\cdot sen\dfrac{p-t}{2}$, al secondo membro abbiamo semplicemente scambiato l'ordine dei fattori. Così abbiamo ricavato la seconda formula di prostaferesi, con la lettera t al posto della lettera q. Restano da verificare le ultime due formule di prostaferesi. Somma e differenza di coseni: $\cos p+\cos q=2\cos\dfrac{p+q}{2}\cdot\cos\dfrac{p-q}{2}$, $\cos p-\cos q=2sen\dfrac{p+q}{2}\cdot sen\dfrac{p-q}{2}$ cos. Ricominciamo con il ragionamento iniziale, cioè partiamo dalle formule di addizione , questa volta però per il coseno. Le formule di addizione ci dicono: $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-sen\alpha sen\beta$; $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+sen\alpha sen\beta$. Anche in questo caso sommiamo termine a termine le due uguaglianze e troviamo: $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta-sen\alpha sen\beta+\cos\alpha\cos\beta+sen\alpha sen\beta$, semplifichiamo al secondo membro e troviamo $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta$. La formula appena ricavata è imparentata con la terza formula di prostaferesi, anzi è proprio uguale ad essa con lo stesso cambiamento di variabile di prima. Al posto di $\alpha+\beta$ scrivo p, e al posto di $\alpha-\beta$ scrivo q, al posto di α scrivo $\dfrac{p+q}{2}$ e al posto di β scrivo $\dfrac{p-q}{2}$, quindi ottengo $\cos p+\cos q=2\cos\dfrac{p+q}{2}\cdot\cos\dfrac{p-q}{2}$. Per dimostrare l'ultima formula di prostaferesi $\cos p-\cos q=2sen\dfrac{p+q}{2}\cdot sen\dfrac{p-q}{2}$, facciamo la differenza fra le due formule di addizione appena utilizzate, invece di sommarle sottraiamo la seconda dalla prima.

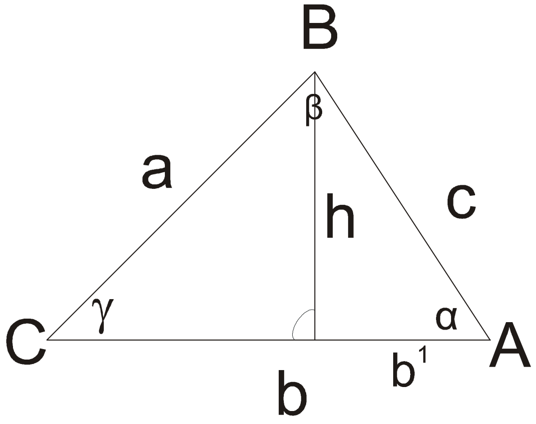
$cos(\alpha+\beta)=cos\,\alpha\,cos\,\beta-sen\alpha sen\beta$; $cos(\alpha-\beta)=cos\,\alpha\,cos\,\beta+sen\alpha sen\beta$, In questo modo troviamo:
$cos(\alpha+\beta)+cos(\alpha-\beta)=cos\,\alpha\,cos\,\beta-sen\alpha sen\beta+cos\,\alpha\,cos\,\beta+sen\alpha sen\beta$;
$cos(\alpha-\beta)-cos(\alpha+\beta)=cos\,\alpha\,cos\,\beta+sen\alpha sen\beta-(cos\,\alpha\,cos\,\beta-sen\alpha sen\beta)\rightarrow$
$\rightarrow cos(\alpha-\beta)-cos(\alpha+\beta)=cos\,\alpha\,cos\,\beta+sen\alpha sen\beta-cos\,\alpha\,cos\,\beta+sen\alpha sen\beta\rightarrow$
$\rightarrow cos(\alpha-\beta)-cos(\alpha+\beta)=2sen\alpha sen\beta$.
La formula appena ricavata è l'ultima formula di prostaferesi con la stessa sostituzione di variabile di prima. Al posto di $\alpha+\beta$ scrivo *p*, e al posto di $\alpha-\beta$ scrivo *q*, al posto di α scrivo $\frac{p+q}{2}$ e al posto di β scrivo $\frac{p-q}{2}$, quindi ottengo $cos\,q-cos\,p=2sen\frac{p+q}{2}sen\frac{p-q}{2}$, moltiplico per *–1* entrambi i membri: $cos\,p-cos\,q=-2sen\frac{p+q}{2}sen\frac{p-q}{2}$.
Le formule di prostaferesi non vengono chieste a memoria ne tanto meno viene chiesto di ricavarle.
Basta sapere che esistono e quando servono basta prendere un formulario e le troviamo. Per concludere la rassegna di trigonometria due importanti teoremi sui triangoli qualunque, che completano il discorso incominciato con la risoluzione dei triangoli rettangoli, che sono triangoli molto particolari.
Parliamo del teorema del coseno e del teorema dei seni.





Cominciamo con il teorema del coseno. Vale in un triangolo qualunque. Prendo un triangolo qualunque, e indico con *A*, *B* e *C* i suoi vertici, con α , β e γ gli angoli, e con *a*, *b* e *c* i lati. Il teorema del coseno dice che un qualunque lato, come per esempio il lato *c*, il ruolo dei lati è intercambiabile quindi si può prendere un qualunque lato e il discorso vale lo stesso, mi riferisco per fissare l'idea al lato *c* , si esprime come la radice quadrata di a^2+b^2-2ab $a^2+b^2+2ab\cdot cos\gamma$, dove γ è l'angolo opposto: $c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cdot cos\gamma}$, questo è l'enunciato del teorema del coseno, che permette di trovare un lato qualunque di un triangolo qualunque partendo dagli altri due lati e dall'angolo fra essi compreso. Conoscendo il lato *a*, il lato *b*, e l'angolo γ siamo in condizioni di determinare la lunghezza del lato *c*. Ad esempio se nel punto *C* c'è una nave in mare e con strumenti di telemetria si può rilevare la distanza di un'altra nave *A* e di un'altra nave *B*,e poi con un goniometro l'angolo γ che sussiste fra le due direzioni di osservazione, si può risalire da *C* senza bisogno di andare sui luoghi *A* e *B* alla distanza che intercorre fra le navi *A* e *B*. Anche in astronomia se dalla terra in *C* osserviamo due satelliti *A* e *B*, con strumenti di telemetria possiamo risalire alla distanza da noi che siamo in *C* dell'uno e dell'altro satellite, quindi le lunghezze dei lati *a* e *b*, e poi con un goniometro misuriamo l'ampiezza dell'angolo γ, noi possiamo dire a che distanza sono i satelliti l'uno dall'altro. E' interessante osservare che il teorema del coseno contiene come caso particolare il teorema di Pitagora, è una generalizzazione del teorema di Pitagora. Infatti andiamo a vedere cosa succede quando l'angolo γ è un angolo retto. Applichiamo il teorema del coseno a questo triangolo rettangolo e troviamo che *c* (l'ipotenusa) è uguale radice quadrata di $a^2+b^2-2ab\cdot cos$ dell'angolo retto, ma il coseno dell'angolo retto è uguale a *0*, quindi il teorema del coseno se l'angolo γ è retto si riduce a questo enunciato: $c=\sqrt{a^2+b^2}$, che è il teorema di Pitagora.

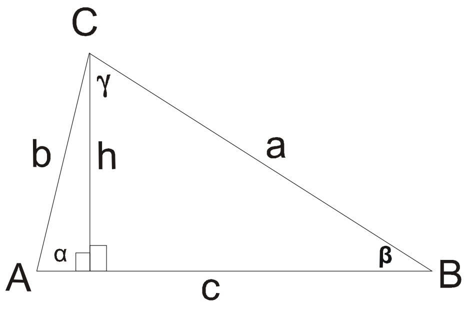
Fatte tutte queste considerazioni sull'importanza del teorema del coseno, vediamo come si può ricavare il teorema del coseno partendo dalle nozioni sviluppate fino a questo momento.



L'obiettivo è quello di esprimere il lato *c*. Conduco dal vertice *B* l'altezza del triangolo e la chiamo *h*, adesso esprimo *c* usando il teorema di Pitagora applicato al triangolo rettangolo che ho costruito, quindi $c=\sqrt{h^2+(b^1)^2}$, adesso esprimiamo *h* e b^1 con le formule note. Ci chiediamo per esempio se possiamo esprimere *h* a partire da *a*, *b* e γ?

Possiamo farlo perché possiamo ragionare sul triangolo rettangolo che ha per ipotenusa il lato *a* e per cateto verticale il lato *h*, e noi sappiamo che in qualunque triangolo rettangolo un cateto, per esempio *h* è uguale al prodotto dell'ipotenusa che è *a* per il seno dell'angolo opposto, quindi $h=a\cdot sen\gamma$, poi mi serve un'espressione di b^1. Si può ricavare b^1 prendendo tutto *b* e togliendogli il pezzo che corrisponde al cateto orizzontale del triangolo che ha il lato *a* per ipotenusa, e *h* come cateto verticale, quindi si può ricavare moltiplicando *a* per il coseno dell'angolo adiacente γ: $b^1=b-(a\cdot cos\,\gamma)$; adesso possiamo sostituire al posto di *h* e di b^1 le espressioni che abbiamo ricavato e quindi troviamo: $c=\sqrt{(a\cdot sen\gamma)^2+(b-(a\cdot cos\,\gamma))^2}=\sqrt{a^2sen^2\gamma+b^2-2ab\,cos\,\gamma+a^2\,cos^2\,\gamma}$, a questo punto ricordando la prima identità fondamentale della goniometria che dice che $sen^2\gamma+cos^2\,\gamma=1$, il primo e l'ultimo termine di questa somma si riducono semplicemente ad a^2, e quindi $c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\,cos\,\gamma}$; la formula appena ricavata ci da proprio quello che volevamo dimostrare cioè la tesi del teorema del coseno.

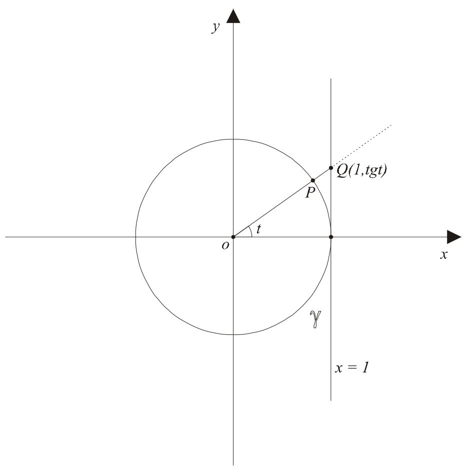
Teorema dei seni.



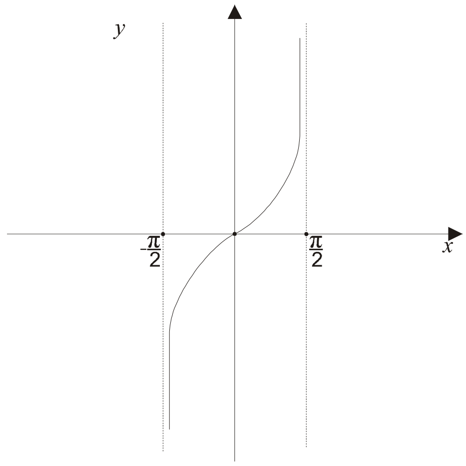
In un triangolo qualunque $\frac{a}{sen\alpha}=\frac{b}{sen\beta}=\frac{c}{sen\gamma}$; per ladimostrazione è sufficiente verificare che $a\cdot sen\beta=b\cdot sen\alpha$; $h=a\cdot sen\beta=b\cdot sen\alpha \rightarrow a\cdot sen\beta=b\cdot sen\alpha$.

Esercizio : tracciare il grafico di: *y=tgt*; $y=\frac{1}{cos^2 t}-tg^2 t$; *y=sen 2t*; $y=\frac{1}{2}sen2t$.

y=tgt

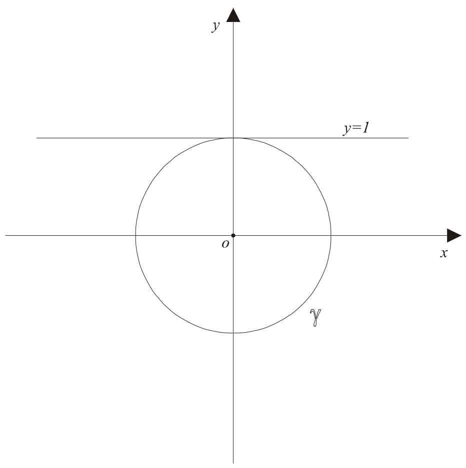


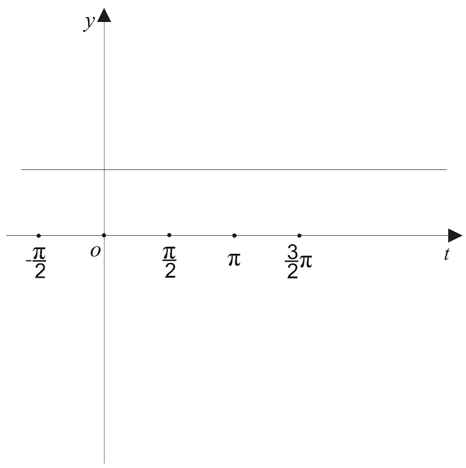
$t\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$



$y=\frac{1}{cos^2 t}-tg^2 t$

ma $\frac{1}{cos^2 t}=1+tg^2 t$, quindi $y=1+tg^2 t-tg^2 t \rightarrow y=1$, $t\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, 0 esclusi.





y=sen 2t; sen2t=2sentcost