Definizione della radice quadrata. Simbolo di appartenenza. Intervalli aperti.

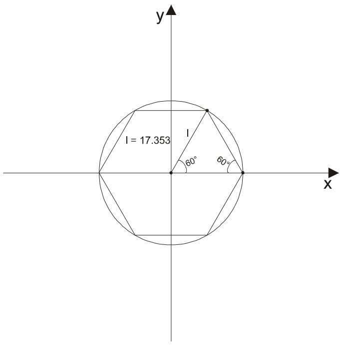
Esercizi sulla similitudine tra poligoni regolari.

Definizione

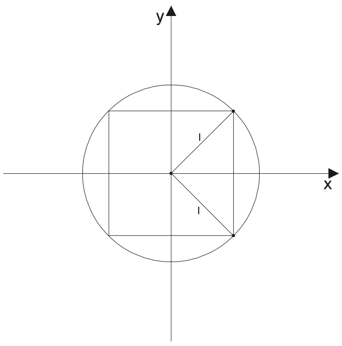
la radice quadrata $\sqrt{a}$ di un numero reale $a \geq 0$ è quell'unico numero reale non negativo il cui quadrato è il radicando *a*.

Esercizio 6

Consideriamo un esagono regolare di lato $l=17.353$.
Calcolare il rapporto tra il perimetro dell'esagono e il raggio del cerchio circoscritto.



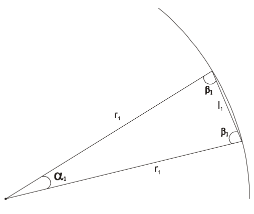
Qui abbiamo bisogno del perimetro *p* e del raggio *r* del cerchio circoscritto e dobbiamo calcolare $\frac{p}{r}$. Il perimetro *p* è *6* volte il lato, il raggio del cerchio circoscritto è uguale a *l*, il triangolo in figura di lato *l* è isoscele ed equilatero.
Allora $r=l=17.353$ e il rapporto fra il perimetro *p* e il raggio del cerchio circoscritto *r* è $\frac{6l}{l}=6$ perchè $p = 6l$ ed il raggio $r=l=17.353$;
tutti gli esagoni hanno la seguente proprietà:
il rapporto tra il perimetro e il lato del cerchio circoscritto è sempre *6* .

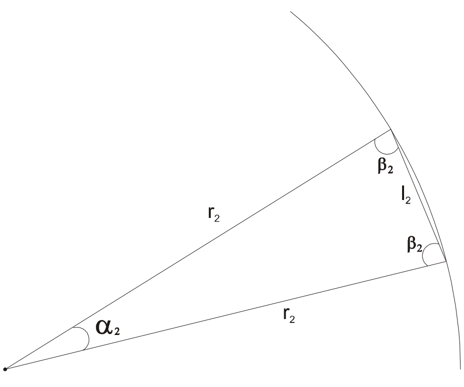


Per quanto riguarda un altro poligono, ad esempio se consideriamo un quadrato, indichiamo con *l* il lato del quadrato e con p_4 il suo perimetro che sarà uguale *4* volte il lato: $p_4=4l$, il raggio del cerchio circoscritto si trova applicando il teorema di Pitagora al triangolo in figura, ossia l'ipotenusa al quadrato: $l^2 = r^2 + r^2 = 2r^2 \rightarrow r = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\frac{p_4}{r} = \frac{4l}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 4\sqrt{2}$, anche nel caso dei quadrati il rapporto è uguale per tutti i quadrati.

Esercizio 7

Consideriamo due poligoni regolari aventi 367 lati ciascuno. Supponiamo che i raggi dei rispettivi cerchi circoscritti siano $r_1=22$ e $r_2=41$.





Indicati con P_1 e P_2 i perimetri dei due poligoni, calcolare la differenza $\frac{p_1}{r_1} - \frac{p_2}{r_2}$. Il rapporto fra perimetro e raggio di un poligono non dipende dalla grandezza del poligono, come abbiamo già constatato con l'esagono e con il quadrato degli esercizi precedenti. Prendiamo un poligono con *367* lati; lo possiamo dividere in *367* triangoli, uno dei quali è raffigurato con un arco della circonferenza circoscritta in figura; dunque l'angolo al centro si ricava prendendo l'angolo giro e dividendolo per *367*, ossia chiamato α tale angolo esso sarà $\frac{360}{367}$; chiamiamo r_1 entrambi i raggi che delimitano l'angolo α_1, quindi abbiamo un triangolo isoscele e chiamiamo β_1 gli angoli opposti ad α_1 che sono uguali tra loro.

Il valore di β_1 si può ricavare facendo:
180 (che è la somma degli angoli interni del triangolo) meno α_1 diviso *2*:

$$\beta_1 = \frac{180 - \alpha_1}{2}.$$

Questo vale per il poligono di raggio r_1. Consideriamo il poligono il cui raggio è r_2. Anche in questo caso i lati sono uguali tra loro perché il poligono è regolare, quindi anche l'angolo al centro α_2 si trova dividendo l'angolo giro per il numero dei lati del poligono considerato, ossia *367*: $\alpha_2 = \frac{360}{367}$.
Anche β_2 si ricava come prima:

$$\beta_2 = \frac{180 - \alpha_2}{2}.$$

Quindi i due triangoli sono simili perché hanno gli angoli corrispondenti uguali. Dato che sono simili hanno i lati in proporzione. Quindi chiamati i lati opposti agli angoli α dei due triangoli l_1 ed l_2 possiamo scrivere la relazione: $\frac{l_1}{r_1} = \frac{l_2}{r_2}$, e questa relazione di proporzionalità ci permette di calcolare quello che ci chiede l'esercizio:

$$\frac{p_1}{r_1} - \frac{p_2}{r_2};$$

sostituisco al posto di p_1 *367* volte il lato l_1 e al posto di p_2 *367* volte il lato l_2 e ottengo:

$$\frac{367 l_1}{r_1} - \frac{367 l_2}{r_2},$$

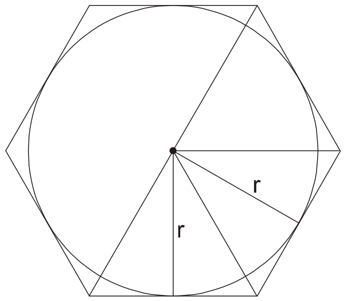
quindi $367\left(\frac{l_1}{r_1} - \frac{l_2}{r_2}\right)$, ma $\frac{l_1}{r_1} - \frac{l_2}{r_2} = 0$, quindi la risposta è *0*.

Definizione di π. Il radiante. Conversione gradi – radianti.

Ora discutiamo alcune conseguenze delle proprietà messe in evidenza con gli esercizi appena svolti. Essi ci permettono di parlare di π. Una fra le tante definizioni di π è la seguente:
π è il rapporto tra la lunghezza della circonferenza e il suo diametro.
Questa definizione è ben posta perché tale rapporto non dipende dalla grandezza della circonferenza.
Questo è vero perché la circonferenza si può approssimare bene quanto si vuole con un poligono regolare. Siccome abbiamo visto dagli esercizi precedenti che per i poligoni regolari il rapporto tra il perimetro e il raggio è un numero fisso che non dipende dalla loro grandezza, questa proprietà si trasferisce alla circonferenza.
Anche nelle circonferenze il rapporto fra la loro lunghezza e quella del raggio o del diametro non dipende dalla grandezza della circonferenza considerata.
Dalla definizione di π segue la nota formula che dice che la lunghezza p della circonferenza è legata al raggio r dalla relazione: $p=2\pi r$
Area del cerchio.
L'area A del cerchio di raggio r è data dalla formula: $A = \frac{p \cdot r}{2}$, dove p è la circonferenza,

perchè l'area A_n del poligono regolare a n lati il cui cerchio inscritto ha raggio r è: $A_n = \frac{p_n \cdot r}{2}$, ove p_n è il perimetro, e r è il raggio del cerchio inscritto.

Illustriamo la frase con una figura.



Prendiamo un poligono a *n* lati, mettiamo *6* lati.
Quindi $n=6$.
Prendiamo il cerchio inscritto.
Il raggio *r* del cerchio inscritto si chiama *apotema* del poligono.
Se voglio calcolare l'area A_n di un poligono a *n* lati, basta che io divida il poligono in *n* triangoli, e poi moltiplico *n* per l'area del triangolo.
L'area del triangolo è uguale: *base per altezza diviso 2*; la base sarebbe il lato *l*, l'altezza sarebbe *r* (*l'apotema*), ecco come si arriva alla formula seguente:

$$A_n = \frac{n \cdot l \cdot r}{2} = \frac{p_n \cdot r}{2}$$

Quindi per ottenere l'area di un poligono a *n* lati, lo divido in *n* triangoli, e moltiplico per *n* l'area del generico triangolo. Poi osservo che il prodotto $n \cdot l$ mi da il perimetro del poligono con *n* lati, quindi tale area si trova facendo: *perimetro per il raggio del cerchio inscritto diviso 2*.
Poi sfruttando il fatto che l'area del cerchio e la lunghezza della circonferenza si possono approssimare bene quanto si vuole con le aree e i perimetri dei poligoni regolari circoscritti, questa formula si estende al cerchio, ossia se vale per i poligoni regolari vale anche per il cerchio, quindi l'area del cerchio è data dal prodotto della circonferenza per il raggio diviso 2.
Abbiamo appena visto che in un cerchio la lunghezza della circonferenza *p* è data da $2\pi r$; sostituendo $2\pi r$ a *p* nella formula:

$A = \frac{p \cdot r}{2}$ si trova $A = \frac{2\pi r \cdot r}{2}$, ossia:

$A = \frac{2\pi r^2}{2} = \pi r^2$, che la formula dell'area del cerchio.

Riepilogo:

1. similitudine tra poligoni;cioè il rapporto tra perimetro e raggio non dipende da quanto sono grandi ma solo dal numero dei lati; grazie alla similitudine tra poligoni e con un ragionamento di approssimazione di un cerchio mediante poligoni si può definire π;
2. definizione di π:
   rapporto tra la circonferenza e il diametro; affinché questa definizione sia ben posta bisogna accertarsi che questo rapporto non cambi cambiando cerchio, ma che sia lo stesso per tutti i cerchi; a tal fine si sfrutta la similitudine tra poligoni vista in precedenza e l'approssimazione di un cerchio con un poligono;
3. dalla definizione di π segue che la circonferenza $p=2\pi r$, perché π è uguale alla circonferenza *p* diviso il diametro $2r$;
4. con il ragionamento appena visto, che fa ancora intervenire l'approssimazione con poligoni, si arriva alla formula dell'area: $A=\pi r^2$.

Introduciamo il radiante come unità di misura degli angoli.

Definizione: il radiante è quell'unità di misura degli angoli tale che l'angolo piatto misura πrad, e l'angolo giro di conseguenza $2\pi rad$, e l'angolo retto $\frac{\pi rad}{2}$.

Consideriamo un dato angolo la cui misura sia $\alpha°$ o anche βrad e vogliamo sapere che relazione c'è tra α e β.
Basta scrivere la seguente proporzione:

$\frac{\alpha°}{180°} = \frac{\beta rad}{\pi rad}$, da cui si trova:

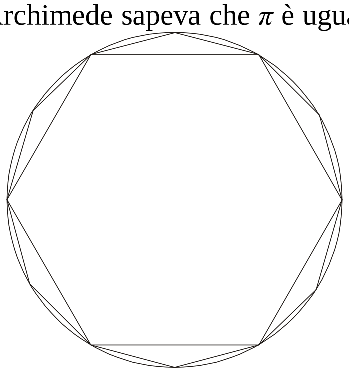
$$\alpha° = \frac{180° \beta rad}{\pi rad} \rightarrow \alpha° = \frac{180° \beta}{\pi}.$$

Applicazione:

Prendiamo un angolo di un radiante;
se $\beta = 1rad$
allora $\alpha°$ (la misura in gradi):
siccome π è appena appena maggiore di *3*, *180* diviso *3* fa *60* , il valore ottenuto è appena appena più piccolo di *60°*.
L'ampiezza in gradi di un angolo di un radiante è di poco inferiore a *60°*.

Esercizio: esprimere questo valore in gradi, primi e secondi.

Per poter risolvere questo esercizio prendiamo per buono il valore numerico di π delle calcolatrici.
Il calcolo numerico di π è un problema molto noto, ed esistono vari metodi.
Uno dei primi metodi numerici per calcolare π fu utilizzato nel III° secolo a.C. da Archimede di Siracusa. Illustriamo brevemente il metodo di Archimede di Siracusa per il calcolo numerico di π perchè si innesta molto bene sull'argomento relativo all'approssimazione del cerchio con poligoni.
Archimede sapeva che il rapporto tra il perimetro di un poligono regolare e il raggio non dipende dalla grandezza del poligono stesso, sapeva quindi che il rapporto fra circonferenza e diametro è lo stesso per tutti i cerchi, anche se allora non si usava la lettera *p* dell'alfabeto greco come la usiamo noi.
Archimede sapeva che π è uguale al rapporto della circonferenza *p* diviso il diametro *2r*, e sapeva anche che π è uguale all'area del cerchio di raggio *1*, ossia all'area *A* di un cerchio diviso il quadrato del raggio; questi concetti gli erano noti anche se egli non utilizzava la notazione che usiamo oggi.



Quindi, per calcolare numericamente π, Archimede utilizza dei poligoni regolari inscritti alla circonferenza e dei poligoni regolari circoscritti, in questo modo si può avere una stima per eccesso e una stima per difetto dell'area *A* del cerchio e quindi del numero π.
Quindi stimava π usando poligoni.
Determinava il perimetro dell'esagono regolare, che è *6* volte il lato e quindi è facile, poi prendeva dei poligoni con un maggior numero di lati per ottenere un'approssimazione migliore e ridurre l'errore commesso.
Per utilizzare poligoni con un maggior numero di lati usa una tecnica ingegnosa che permette di determinare il perimetro del poligono con il doppio dei lati di un poligono dato.
Quindi il perimetro dell'esagono si trova con considerazioni elementari, poi si può prendere il dodecagono, perchè mantenendo fissi i vertici dell'esagono, si può costruire il dodecagono; laddove l'esagono ha un solo lato, il dodecagono ne deve avere due.
Continuo questa costruzione per ciascuno dei *6* lati dell'esagono e costruisco il dodecagono.
L'area del dodecagono si ottiene sommando all'area dell'esagono l'area dei tringoli aggiunti; quindi raddoppio ancora e passo al poligono con *24* lati; poi con *48* lati; quindi con *96* lati.
L'approssimazione ottenuta da Archimede con il poligono di *96* lati, espressa nel linguaggio moderno è come dire che π è circa *3,14*, come trovare le prime due cifre decimali di π.