Periodicità di *sent*, *cost* e *tgt*.

Nozione di funzione pari e dispari; interpretazione geometrica.

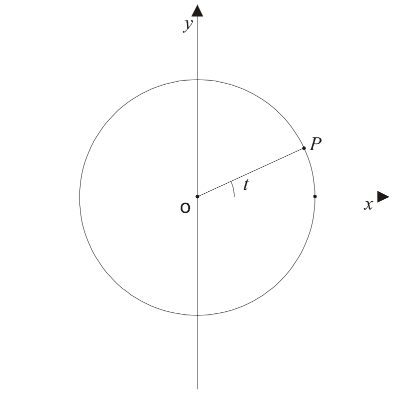
Parità e disparità di *sent* e *cost*.

Funzioni Trigonometriche e loro proprietà.

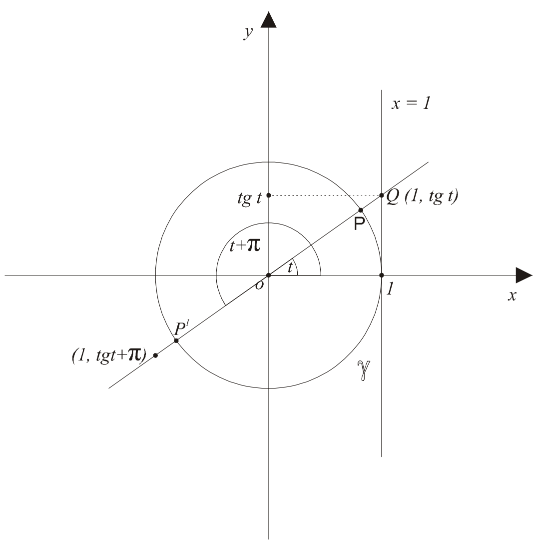
1. Periodicità
2. Parità di alcune di esse e disparità di altre
3. Monotonia
4. Concavità in certi casi e convessità in altri
5. Comportamento agli estremi dell'insieme di definizione

Seguendo questo piano di lavoro cominciamo a vedere la periodicità di alcune funzioni trigonometriche.

Periodicità. La funzione *sent*.
Dalla definizione risulta: $sent = sen(t+2\pi)$ per ogni $t \in \Re$.

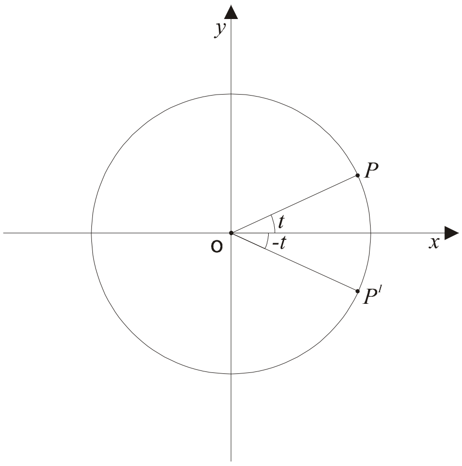


Verifichiamo questa formula facendo riferimento alla definizione della funzione *sent*, quindi rappresentiamo *t* sulla circonferenza trigonometrica, *t* è un valore reale qualunque, e poi rappresentiamo *(t+2π)*; *2π* è l'angolo giro espresso in radianti, se si aggiunge a *t* l'angolo giro, il punto *P* individuato sulla circonferenza trigonometrica è lo stesso, e quindi le sue coordinate sono le stesse. Per definizione le sue coordinate sono *(cost,sent)*, ma anche *(cos(t+2π),sen(t+2π))*:
P=(cost,sent)=(cos(t+2π), sen(t+2π))
da cui discende la formula che volevamo dimostrare.
Si dice che la funzione *f(t)=sent* è periodica di periodo *2π*; significa che cambiando l'argomento di *2π* il valore di seno non cambia. Lo stesso ragionamento ci fa vedere non solo che *sent=sen(t+2π)*, ma che la stessa relazione vale anche per il coseno. Quindi al posto di sen si può scrivere cos e vale la stessa conclusione:
la funzione *f(t)=cost* è periodica di periodo *2π*.
Le funzioni *f(t)=cost* e diciamo *g(t)=cost* sono periodiche di periodo *2π*. Per quanto riguarda la tangente trigonometrica si trova una periodicità di periodo *π*, cioè si trova che *tg(t)=tg(t+π)* per ogni valore di *t* ammissibile. Ricordiamo che non tutti i valori reali della variabile *t* sono ammissibili per il calcolo di *tgt*; bisogna che *t* sia tale che la differenza $t-\frac{\pi}{2}$ non sia multipla di *π*; quando tale differenza è un multiplo di *π* la funzione di *tgt* non è definita. Esiste una notazione che dice che dice che *tgt* è definita per *t* diverso da $\frac{\pi}{2}+k\pi$ dove *k* è un parametro introdotto per indicare i multipli di *π*, e *k* è un numero intero, e l'insieme dei numeri interi si indica con la lettera Z da Zahlen che in tedesco significa numeri $t \neq \frac{\pi}{2}+k\pi, k \in Z$. Verifichiamo se questa relazione è soddisfatta, ossia se cambiando l'argomento della tangente di un multiplo di *π* il risultato non cambia. Basta rifarsi alla definizione della tangente trigonometrica: si prende la circonferenza trigonometrica e si considera la retta di equazione *x=1*, poi si prende un valore arbitrario di *t* soddisfacente quella condizione e si determina il punto *P*; la retta che contiene il segmento *t* interseca la retta *x=1* in un punto *Q* la cui ordinata è *tgt* e la cui ascissa è *1* per definizione. Cosa succede se si aggiunge *π* all'argomento *t*? Sapendo che *π* è la misura in radianti dell'angolo piatto si passa alla situazione rappresentata nella figura dove l'angolo è *t+π* e quindi al posto del punto



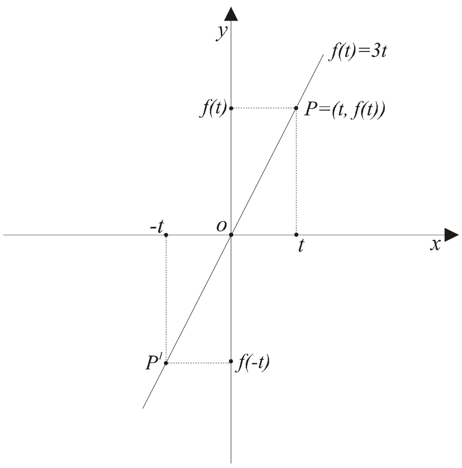
P si deve considerare il punto P^1. Per fare $tgt+\pi$ parto da *P*, aggiungo π ossia l'angolo piatto e costruisco il punto P^1, poi prendo la retta che contiene il segmento $\overline{OP^1}$ che è chiaramente la retta che contiene il segmento $\overline{OP}$ perchè i due segmenti giacciono sulla stessa retta, la quale interseca la retta $x=1$ nello stesso punto *Q* di prima, ecco perchè $tgt=tg(t+\pi)$. La formula si enuncia dicendo che la funzione $h(t)=tgt$ è periodica di periodo π; seno e coseno sono periodici di periodo 2π, tangente di periodo π.

Parità e disparità

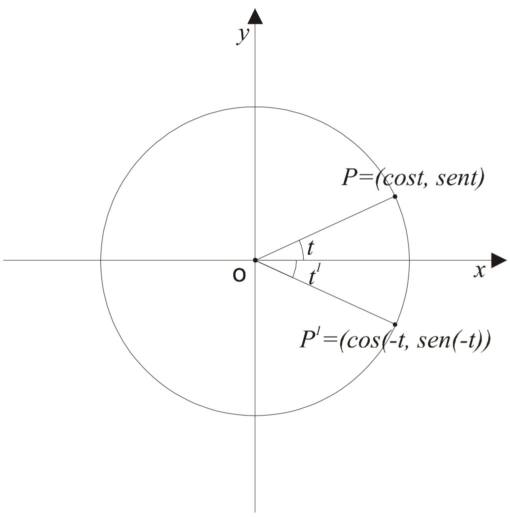


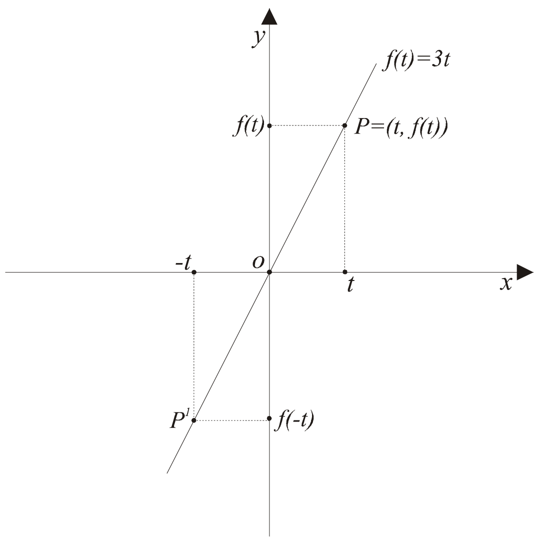
Cominciamo dal *sent*: risulta che *sen(-t)* è legato a *sent* da una relazione molto semplice e notevole. Prendiamo un valore arbitrario di *t*, questo individua un punto sulla circonferenza trigonometrica le cui coordinate sono *(cost,sent)*: *P=(cost,sent)*.Poi studiamo *sen(-t)*. Per fare ciò dobbiamo rappresentare *–t* sulla circonferenza trigonometrica, individuare un punto che chiameremo P^1 con coordinate $P^1=(cos(-t),sen\ (-t))$. Ma siccome *t* e *–t* sono uguali in valore assoluto risulta che *sen(-t)* (l'ordinata di P^1) è composta rispetto a *sent* che è l'ordinata di *P*, cioè *sen(-t)=-sent*, e questo vale per ogni *t* reale e si chiama disparità di una funzione. La funzione *sent* si dice dispari. In generale una funzione qualunque si dice dispari se succede quello che succede per la funzione *sent*, cioè se la funzione *f* calcolata in un qualunque *t* del suo insieme di definizione è uguale a *-f(-t)*: *f(t)* è dispari se *f(t)=-f(-t)*. Cambiando il segno dell'argomento il valore del seno cambia (anche nel disegno). Dunque questa è la proprietà chiamata disparità.

Esempio: prendiamo la funzione *f(t)=3t* il cui grafico è una retta passante per l'origine avente per coefficiente angolare *3*, vediamo se è una funzione dispari. Per verificare se è pari o dispari si studia *f(-t)* (deve succedere quello che succede per *sent*, cioè deve cambiare il segno, *f(-t)* deve essere uguale all'opposto di *f(t)*. Per trovare *f(-t)* parto dalla definizione di *f* e al posto di *t* metto *-t*, così come si fa quando si vuol calcolare la funzione *f* per un valore particolare di *t*, per esempio se si vuol calcolare *f(4)* si sostituisce *4* al posto di *t* e $3\cdot 4=12$; adesso si vuole studiare *f(-t)* (senza descrivere un valore particolare di *-t*), allora al posto di *t* si sostituisce *-t*. Il *3* non lo si tocca perchè è un coefficiente costante, uso le parentesi perchè non è la differenza *(3-t)* ma è il prodotto $(-3t)$ e fa $(-3t)$, ma $(-3t)$ è proprio l'opposto di *f(t)* ossia $-f(t)$ e dunque la definizione di disparità è soddisfatta, anche la funzione *f(t)=3t* è dispari.



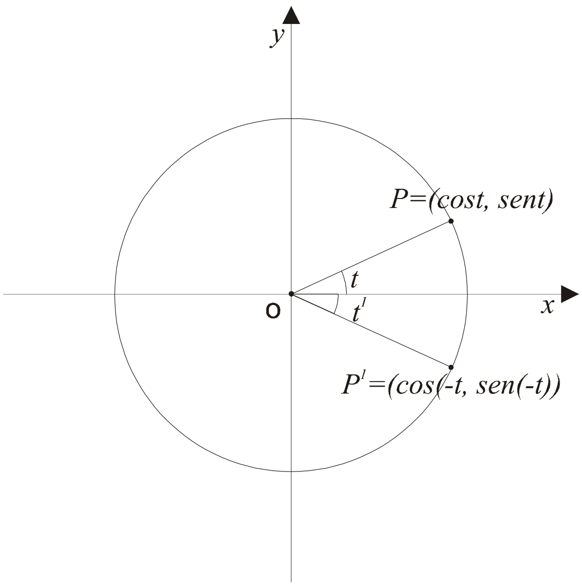
Ma vediamo l'interpretazione geometrica della disparità. Il punto P^1 viene disegnato nel quarto quadrante perché si ottiene da *-t*, ed è il punto di coordinate *(cos(-t),sen(-t))*. Quindi per ottenere P^1 bisogna prima rappresentare *-t* partendo da *t* e procedendo come segue: nel disegno *t* rappresenta un numero piccolo e positivo, *-t* rappresenta dunque un numero negativo e piccolo in valore assoluto; i numeri negativi si rappresentano partendo dal semiasse delle *x* positive e ruotandolo in senso orario di un angolo uguale al valore assoluto del numero che si vuole rappresentare (nel nostro caso *t*); una volta rappresentato *-t* posso individuare il punto P^1.





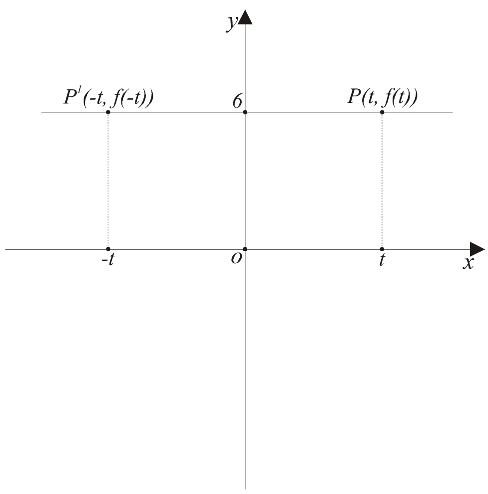
Prendiamo la funzione *f(t)=3t*, che significa che se prendo un valore arbitrario della variabile *t*, ad esempio *3*, e poi determino *f(t)*, e quindi trovo il punto del grafico di coordinate *(t,f(t))*, poi vado a rappresentare *–t* sugli assi cartesiani e poi vado a rappresentare *f(-t)* che è l'ordinata del punto P^1. La disparità consiste nel dire che una cosa è l'opposta dell'altra, ossia che l'ordinata del punto *P*: *f(t)* è opposta all'ordinata di P^1*: f(- t)*, ossia *P* e P^1 hanno le ordinate che sono l'una l'opposto dell'altra.

Riassunto: per qualunque punto *P* di coordinate *(t,f(t))* del grafico di *f* il punto P^1 di coordinate *(-t,-f(t))* appartiene ancora al grafico di *f*. In sintesi il grafico di *f* è simmetrico rispetto all'origine.

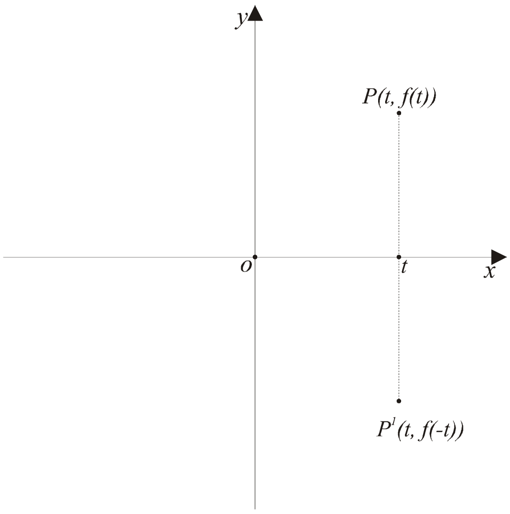


Vediamo cosa succede per *cost*. Cosa succede se si cambia il segno all'argomento e si passa a *cos(-t)*, ossia che relazione c'è tra *cost* e *cos(-t)*. Bisogna considerare la definizione del coseno quindi si prende la circonferenza trigonometrica, si rappresenta il valore di *t* su di essa , questo determina un punto *P* sulla circonferenza le cui coordinate per definizione sono *(cost,sent)*, e fin quì non c'entra nulla la parità e la disparità; poi determiniamo *–t*, e questo determina un punto P^1 di coordinate *(cos(-t),sen(-t))*. Vediamo che relazione c'è tra le ascisse di *P* e le ascisse di P^1, esse sono uguali tra loro, quindi *cost* e *cos(-t)* sono uguali tra loro per ogni *t* reale e questa si chiama parità, e la funzione *cost* si dice *pari*, e in generale una funzione *f(t)* si dice pari se risulta che cambiando il segno all'argomento il risultato non cambia. *cost=cos(-t)* per ogni $t \in \Re$. La funzione *f(t)* si dice pari se *f(t)=f(-t)* per ogni *t* nell'insieme di definizione di *f*. L'interpretazione geometrica della parità è una *simmetria* rispetto all'asse delle *y*.

Per esempio verifichiamo se la funzione *f(t)=6* è pari: *cost* è pari perchè l'abbiamo già verificato dalla definizione di coseno, prendiamo la funzione costante *f(t)=6*, che vale sempre *6* indipendentemente dal valore di *t*. Per vedere se è pari o se è dispari bisogna fare *f(-t)* e confrontarlo con *f(t)* che da sempre *6* perchè è una funzione costante indipendentemente dal valore dell'argomento. E siccome *f(t)* e sono uguali la definizione di funzione pari risulta soddisfatta e quindi tutte le costanti sono funzioni pari. Il grafico della costante *6* è una retta orizzontale nel piano *xy* disegnata a ordinata *6*. Adesso facciamo l'interpretazione geometrica della parità.



Si rappresentano *t* e *–t*, i corrispondenti punti del grafico li chiamo <u>*P*</u> e P^1 , le coordinate di *P* e P^1 sono rispettivamente *(t,f(t))* e *(-t,f(-t))*. Per interpretare la parità diciamo che le ordinate di *P* e di P^1 sono uguali tra loro. Nella disparità sono una l'opposto dell'altra. Quindi per ogni punto *P* del grafico di *f* il punto simmetrico P^1*=(-t,f(-t))* sta ancora sul grafico, cioè il grafico è simmetrico rispetto all'asse *y*. Dunque disparità significa simmetria del grafico rispetto all'origine perchè i punti del grafico sono simmetrici mentre parità significa simmetria rispetto all'asse delle *y*. La simmetria rispetto all'asse delle ascisse non si può avere perchè viola la proprietà funzionale. Troviamo coseno che è una funzione pari e studiamo la simmetria rispetto all'asse delle ascisse.



Tesi: la simmetria rispetto all'asse x viola la proprietà funzionale. Cerchiamo di giustificare l'affermazione e prendiamo un punto *P* del grafico di una certa funzione, quindi *P* avrà coordinate *(t,f(t))*. Questa è una situazione generica: un punto non meglio specificato su un grafico di una non meglio specificata funzione. Poi prendiamo il simmetrico di *P* rispetto all'asse delle *x* e lo chiamiamo P^1 di coordinate *(t,-f(t))*, le ascisse sono uguali. Il quesito è quale è il valore di *f(t)* ?

La funzione deve restituire un unico valore per ogni valore della variabile indipendente *t* appartenente al dominio della funzione stessa. Immaginiamo di avere una funzione non meglio specificata, assegniamo un certo valore *t* all'argomento e otteniamo un risultato da questa funzione, che è un unico valore *(f(t)*. Questa è la proprietà funzionale: l'unicità del valore restituito dalle funzioni, quindi non è possibile che *P* e P^1 appartengano al grafico della stessa funzione. In forza della proprietà funzionale *P* e P^1 sono simmetrici ma non uguali, ma soprattutto non possono stare sul grafico di una stessa funzione, perchè quando metti *t* nella funzione che tu hai, il risultato o ti da l'ordinata di *P*, o l'ordinata di P^1 ma non ti da tutte e due, ecco perchè non si studia tra le proprietà paritative la simmetria rispetto all'asse delle x.

Parliamo della circonferenza. Disegniamo una circonferenza centrata nell'origine e di raggio qualunque. Essa ha la proprietà: preso *t* troviamo due punti *P* e P^1 che hanno la stessa ascissa ma sono diversi perchè hanno diversa ordinata. Il concetto potrebbe essere applicato anche alla parabola. Possiamo affermare che la circonferenza non è il grafico di una funzione (di nessuna funzione). Nonostante l'importanza che la circonferenza riveste , essa è una linea notevole la cui equazione è $x^2+y^2=r^2$ se il centro è nell'origine (per semplicità), infatti la sua equazione non è *y=f(x)* (ossia non è scritta *y=qualcosa di x*), quindi non è il grafico di una funzione. Altri esempi che abbiamo visto simili sono le rette parallele all'asse *y*. Se prendiamo una retta parallela all'asse *y*, essa non è il grafico di una funzione perchè c'è un solo valore della *x* ma ci sono addirittura infiniti valori possibili della *y*, tutti i punti *t* sulla retta hanno la stessa ascissa, ma l'ordinata può essere qualunque numero reale, dunque non è il grafico di una funzione. Quindi ci sono molte linee notevoli come ad esempio quelle considerate che non sono grafici di funzione, infatti l'equazione di queste rette è del tipo *x=costante* e non *y=f(x)*, la *y* non c'è proprio. Nella circonferenza la *y* c'è ma è al quadrato, non si può ricavare banalmente.

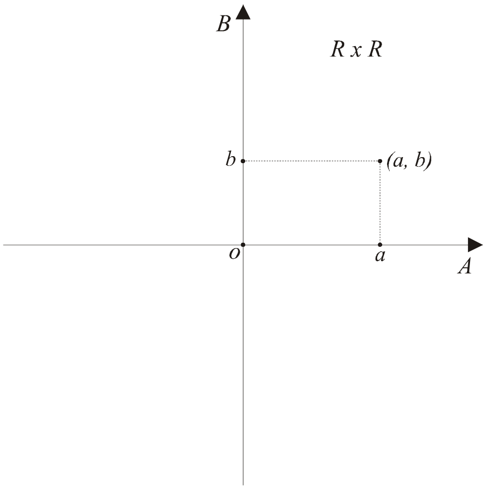
Fino ad ora abbiamo raccolto alcuni esempi di funzione e forse vale la pena di interrompere il discorso sulle proprietà qualitative delle funzioni trigonometriche per soffermarci a discutere in generale il concetto di funzione. Per raccogliere le idee, scriviamo qualche esempio di funzione tra quelli incontrati fin ora. Esempio:

3t–1; *cost*; *sent*; *tgt*; (quattro esempi di funzioni).

Oltre la loro diversità questi quattro esempi hanno in comune la proprietà di essere delle funzioni, nel senso che si possono interpretare in questo modo: assegniamo dei valori alla variabile indipendente *t* e loro, in base alla loro definizione , qualunque essa sia, può essere unitaria o può essere meno, restituiscono un risultato. Questa è l'idea alla base del concetto di funzione. La definizione moderna è la seguente:

dati due insiemi *A* e *B* , che possono essere due insiemi qualunque ma che, con riferimento a questi esempi, rappresentano il dominio e il codominio della funzione che voglio definire. Allora l'insieme *A* è l'intervallo dove varia la variabile indipendente, quindi in questo caso il primo esempio è l'insieme *A*, è l'insieme dei numeri reali, anche nel secondo e nel terzo caso, nell'ultimo caso invece l'insieme *A* è l'insieme dei numeri reali privato di quei *t* che differiscono da $\frac{\pi}{2}$ per un multiplo di π. *B* invece è un insieme che contiene tutti i risultati possibili della funzione, non è l'insieme dei risultati possibili ma un insieme che li contiene, quindi nei quattro esempi il *t* potrebbe essere l'insieme dei numeri reali, perchè in queste funzioni i risultati che escono, sostituendo al posto di *t* un qualunque elemento dell'insieme di definizione *A*, il risultato è in ogni caso un numero reale, quindi come insieme *B* per quei quattro esempi si può prendere l'insieme dei numeri reali, ed infatti si parla di funzioni a valori reali, funzioni reali di variabile reale, intendendo dire che il codominio è l'insieme dei numeri reali e il dominio un suo sottoinsieme.

Dati due insiemi *A* e *B* si dice funzione *f* da *A* verso *B*, e si scrive questa notazione $f{:}A \rightarrow B$ (questa è la notazione per rappresentare una generica funzione avente per dominio un certo insieme *A* e per codominio un certo insieme *B*) un qualunque sottoinsieme $\Re$ del prodotto cartesiano *AxB (A cartesiano B)* avente la proprietà funzionale: per ogni $a \in A$ esiste un unico $b \in B$ tale che $(a,b) \in \Re$.
Non vale per la circonferenza.
Questa definizione non sarà chiesta all'esame.
Il prodotto cartesiano *AxB* è l'insieme di tutte le coppie ordinate del tipo *(a,b)* dove *a* minuscolo è un elemento dell'insieme *A* maiuscolo $a \in A$ e *b* minuscolo è un elemento dell'insieme *B* maiuscolo.
Questo è il prodotto cartesiano di due insiemi. Esempi di prodotto cartesiano (esiste un esempio alla portata di tutti di prodotto cartesiano): facciamo il prodotto cartesiano dell'insieme dei numeri reali per se stesso. In base alla definizione data è l'insieme di tutte le coppie ordinate dei numeri reali, è il prodotto cartesiano RxR e si rappresenta in un piano. Se rappresentiamo l'insieme *A* sull'asse delle ascisse e l'insieme *B* sull'asse delle ordinate abbiamo due coppie dell'insieme dei numeri reali, la generica coppia di numeri reali *(a,b)* la troviamo sul piano cartesiano. Senza saperlo abbiamo già utilizzato ampiamente il prodotto cartesiano. Proprietà funzionale del prodotto cartesiano:



per ogni elemento a del dominio (per ogni valore della variabile indipendente) esiste un unico *b* nell'insieme *B* tale che la coppia *(a,b)* appartiene a $\Re$. Questa è la ragione per cui la circonferenza non è il grafico di una funzione , la circonferenza non ha questa proprietà. Non è vero per la circonferenza che se prendiamo un elemento *a* del dominio esista un unico *b* del codominio; se prendiamo un ascissa *a* non è vero che esiste un'unica ordinata *b* tale che la coppia *(a,b)* sta sulla circonferenza, perché abbiamo già visto che se prendiamo certe ascisse *a* esistono due possibilità per l'ordinata per stare sulla circonferenza e sono l'una l'opposto dell'altra .
Nei libri attuali di analisi matematica al posto di questa definizione troviamo una sua volgarizzazione , una sua rappresentazione intuitiva: intuitivamente una funzione $f{:}A \rightarrow B$ è una legge che associa ad ogni elemento del dominio uno e un solo elemento *b* del codominio, e si scrive: $f{:}A \rightarrow B$ associa ad ogni $a \in A$ uno e uno solo elemento $b \in B$ e si scrive *b=f(a)*. Questa è una nozione alla portata di tutti che non viene chiesta all'esame. Lo studente, anziché dare enunciazioni su cosa è una funzione se ne deve servire al lato pratico. L'ultima definizione si fonda sul prendere per buono il concetto di legge e di associazione che non sono stati preventivamente definiti. Legge ed associazione non si possono dare per scontati ma richiederebbero di essere spiegati e quindi non definisce nulla. La definizione precedente invece dice che una funzione è un sottoinsieme del prodotto cartesiano avente la proprietà descritta e si fonda sulle nozioni tipiche della teoria degli insiemi, sottoinsieme - prodotto cartesiano - appartenenza; infatti nell'impostazione moderna della matematica, alla base logica della matematica si mette la teoria degli insiemi. Abbiamo appena parlato di parità, disparità, e periodicità.
Esercizi
1. Usando la definizione di seno e coseno e usando le relazioni fra *sen* e *cos* di angoli sfasati di *π*, verificare che la funzione $f(t) = sen(t) \cdot cos(t)$ è periodica di periodo *π*;
2. Verificare che la funzione *tgt* è dispari;
3. Consideriamo due funzioni *p(x)* e *d(x)* di cui sappiamo solo che *p(x)* è pari e *d(x)* è dispari. Stabilire se pari e dispari le funzioni $p(x) \cdot d(x)$, $\frac{p(x)}{d(x)}$, $p(x) + d(x)$.

Nozione di funzione crescente strettamente, concava, convessa.
Riprendiamo la lezione sulle proprietà qualitative per parlare della monotonia. La funzione *sent* è strettamente crescente per $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ossia per *t* appartenente all'intervallo che va da $-\frac{\pi}{2} a \frac{\pi}{2}$. Prendo la circonferenza trigonometrica e considero due valori della variabile *t*, diciamo t_1 e t_2 , entrambi nell'intervallo da $-\frac{\pi}{2} a \frac{\pi}{2}$ e soddisfacenti la relazione $t_1<t_2$, e voglio confrontare tra loro i seni $sent_1$ e $sent_2$, cioè sapendo che t_1 è più piccolo di t_2,si può concludere che la stessa relazione vale tra $sent_1$ e $sent_2$? Per rispondere ci serve la definizione di *sent*. Quindi prendo la circonferenza trigonometrica e rappresento t_1 e t_2; t_2 è maggiore di t_1 ed entrambi nell'intervallo $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$. Vediamo come si procede per confrontare i seni di t_1 e t_2. Definiamo i punti P_1 e P_2 per associarli agli angoli t_1 e t_2,poi leggiamo sull'asse delle ordinate $sent_1$ e $sent_2$. Come si può vedere nel disegno $sent_2$ è maggiore di $sent_1$, quindi la risposta è positiva. (Quando si studia il seno, e si vuole definire il *sent*, si procede partendo dalla variabile indipendente *t* per arrivare a definire cosa è *sent*. Se *t* è positivo si può interpretare come un angolo e poi lo si rappresenta nella circonferenza trigonometrica come una ampiezza di un angolo individuato da due semirette, come qualunque angolo, che escono dall'origine e vengono collocate a partire dal semiasse positivo delle ascisse.
Quindi si devono prendere due valori *t* della variabile indipendente che partono entrambi dal semiasse positivo delle ascisse e da li parte la costruzione

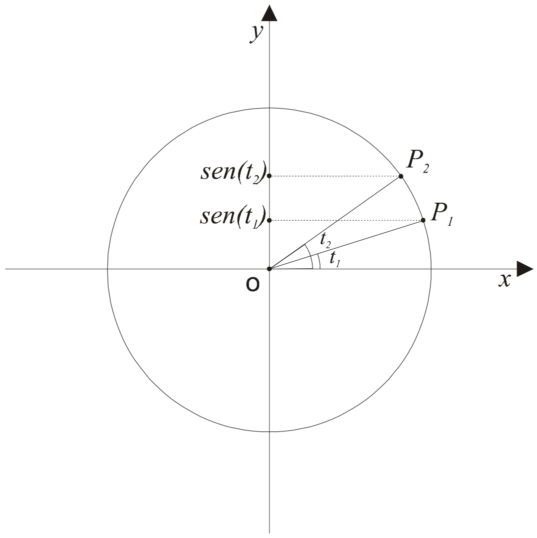


Figura 1

Consideriamo la figura 2: $sen\frac{\pi}{2} = 1$; $sen-\frac{\pi}{2} = -1$; $sen0 = 0$. Rappresentiamo l'intervallo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. I valori di $\frac{\pi}{2} e -\frac{\pi}{2}$ sono notevoli, si tolgono dalla definizione; $\frac{\pi}{2}$ è l'angolo retto e si trova il punto *P*, $-\frac{\pi}{2}$ dalla parte opposta e si trova un punto P_1 , allora $sen\frac{\pi}{2} = 1$ dalla definizione e $sen\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$; *sen(0)=0*. Questi sono valori facilmente determinabili dalla definizione della funzione trigonometrica sen t. Ti portano sul grafico e trovi questi tre punti.

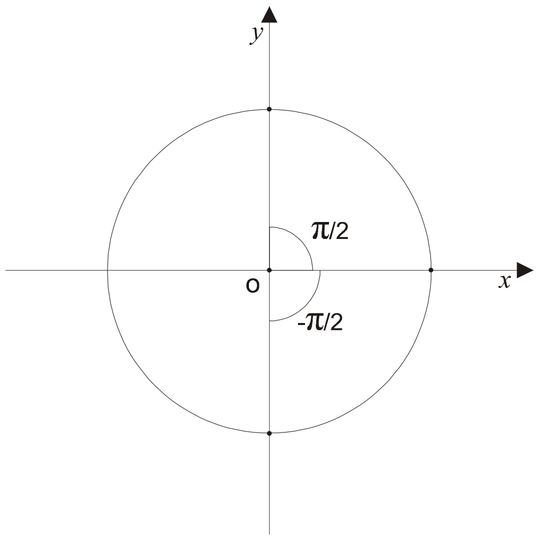


Figura 2

Adesso sfruttiamo la monotonia.

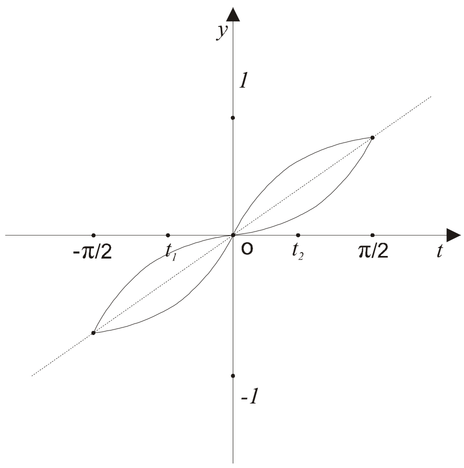
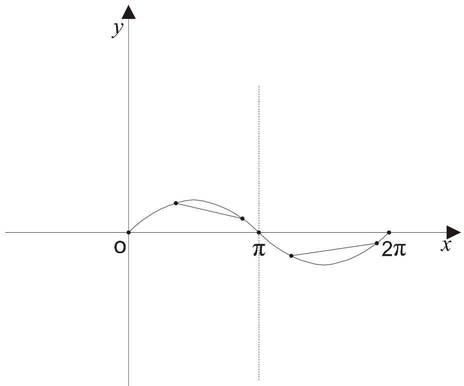


Figura 3

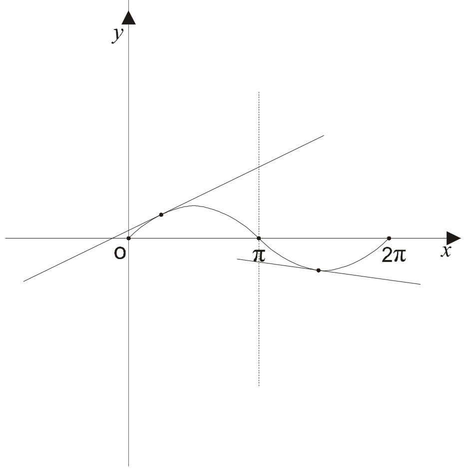
Significa che se prendo due valori di t nell'intervallo da $-\frac{\pi}{2} a \frac{\pi}{2}$, dovunque io li prenda, il valore in t_1 è più piccolo di quello in t_2, quindi la funzione avrà un grafico che potrà essere del tipo di figura 3, sempre simmetrico rispetto all'origine. Monotonia significa che il grafico di questa funzione sale nel piano cartesiano, all'aumentare dei valori della variabile indipendente t, i corrispondenti valori della funzione aumentano anch'essi.

Concavità e convessità

Ci sono varie definizioni. La funzione *sent* è concava per t appartenente all'intervallo che va da 0 a π, convessa per t che appartiene all'intervallo che va da π a 2π. Concavità intuitivamente vuol dire fatta come in figura, sull'intervallo da 0 a π la funzione è concava nel senso che è rivolta come in figura, da π a 2π è convessa come da figura. La linea tratteggiata separa un intervallo in cui la funzione è concava da un altro in cui la funzione è convessa. Esistono varie definizioni e una si basa sulle corde, cioè se prendiamo una qualunque corda che collega due punti qualunque del tratto di grafico in cui la funzione è concava troviamo che il grafico giace al di sopra della corda. Questa è una delle tante definizioni di concavità, quando il grafico sta al di sopra di qualunque corda. Similmente se prendiamo due qualunque punti sull'intervallo $(\pi,2\pi)$ il grafico giace al di sotto di qualunque corda (definizione di convessità), chiaramente ci riferiamo alla corda che sta tra i due estremi.



Esistono altre caratterizzazioni della concavità e convessità. Esse non fanno uso delle corde ma delle tangenti. Le tangenti non sempre esistono, in questo caso si. Vediamo questa proprietà. Se prendiamo un qualunque punto dove è concava e prendiamo la retta tangente ad esso, quindi non abbiamo più bisogno di due punti e la corda, ma di un solo punto, la tangente, allora succede che il grafico giace al di sotto della tangente, dovunque tu lo prenda, dovunque prendiamo un punto del grafico dell'intervallo $(0,\pi)$, il grafico giace sotto la tangente. Questa è la definizione di concavità. Dall'altra parte se prendiamo qualunque punto del grafico e la retta tangente il grafico sta sopra la retta tangente, e la funzione si dice convessa



Esercizi sulla concavità e convessità

1. Verificare che la funzione cos t è crescente per $t \in (\pi, 2\pi)$;
2. Verificare che la funzione cos t è convessa per $t \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$;
3. Verificare che la funzione cos t è convessa per $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$