Definizione di numero reale come allineamento decimale con segno.

Numeri reali positivi.

Numeri razionali: definizione e proprietà di densità

Numeri reali

Definizione: Un numero reale è un allineamento decimale con segno, che significa che ci sono delle cifre con parte intera, la virgola e, di seguito, altre (eventuali infinite) cifre. Esempio: $-287{,}521$. La debolezza di questa definizione sta nel fatto che si fa appello all'intuizione nel momento in cui ci si deve immaginare che ci siano infinite cifre dopo la virgola senza poterle materialmente scrivere. Per evitare l'appello all'intuizione, troviamo altre definizioni essenzialmente meno facili da spiegare. Vediamo alcuni esempi: $0;1;5;-2{,}3$, (allineamenti decimali con segno, quindi chiaramente numeri reali); $\frac{4}{3}\left(=1{,}\overline{33}\right)$; $\pi\left(=3{,}1415...\right)$ che è *il rapporto tra la circonferenza e il diametro*, quindi non si esprime il suo allineamento decimale con segno per darne la definizione a differenza di quanto non si possa fare con lo $0;1;5;-2{,}3$ e anche con il $\frac{4}{3}\left(=1{,}\overline{33}\right)$, che ha un valore periodico dopo la virgola, quindi facendo riferimento all'intuizione si può in qualche modo immaginare quali siano le sue cifre decimali. Per quanto detto possiamo dedurre che la definizione di π è indiretta, quindi si definisce come il rapporto tra la circonferenza e il diametro ma non si esibisce il corrispondente allineamento: non essendoci un periodo, non si scrivono tutte le cifre decimali. Esempi che non sono numeri reali: $+\infty$, $-\infty$, $\frac{\pi^+}{2}$, $\frac{\pi^-}{2}$ (questi simboli non rappresentano numeri reali!)

Esercizio:

Trovare il più grande numero reale. Risposta: $+\infty$, ∞, non esiste (RISPOSTA CORRETTA).

NB: $+\infty$, ∞, per quanto sopra enunciato, non sono numeri reali.

Numeri reali positivi e numeri reali negativi.

Definizione: un allineamento le cui cifre non siano tutte nulle, è positivo se il primo simbolo è il segno +; negativo se il primo simbolo è il segno –.

Spesso il simbolo + si omette.

NB: il numero ZERO non è ne negativo ne positivo.

Questo si può dedurre dalla regola dei segni: il prodotto *xy* è positivo se e solo se *x* e *y* sono concordi nel segno, cioè entrambi negativi o entrambi positivi. Il prodotto *xy* è negativo se la *x* o la *y* hanno uno segno positivo e l'altro negativo. Si deduce quindi che il numero ZERO non sia ne positivo ne negativo. Ammettiamo per un momento (erroneamente) che ZERO sia positivo e applichiamo la regola dei segni al prodotto $o\cdot y$ avente $y=-y$ Avremo che $o\cdot y=0$. Ci troviamo quindi davanti ad una contraddizione in quanto ammettiamo la possibilità che un prodotto tra valori discordi nel segno possa dare un risultato positivo. E' in questo punto che emerge la contraddizione rispetto alla regola dei segni.

Esercizio:

Trovare il più picolo numero reale positivo. Risposta: *0, 1, non esiste* (RISPOSTA CORRETTA)

NB: il segno di quantità come $-x$ dipende dal segno di *x* infatti, il valore *x*, potrebbe essere sia positivo che negativo, quindi potremmo avere $+(-x)$ oppure $-(-x)$. La conseguenza è che: $-(-x)=x$; $+(-x)=-x$.

Esercizio:

Indicato con *x* un numero reale, trovare il segno di $-x$. Risposta: $-x$ è negativo, $-x$ è positivo, dipende da *x* (RISPOSTA CORRETTA).

Numeri razionali.

All'interno dell'insieme dei numeri reali vi è un sotto insieme notevole rappresentato dall'insieme dei numeri razionali.

Definizione: i numeri razionali sono quei numeri reali uguali al rapporto fra due numeri interi.

Esempio: $0;1;5;-2,5;1,\overline{3}$; … sono numeri razionali. Infatti sono uguali alla definizione: $0=\frac{0}{1};1=\frac{1}{1};-2,5=-\frac{5}{2};1,\overline{3}=\frac{4}{3}$.

Non tutti i numeri sono razionali infatti il π, $\sqrt{2}$ e tanti altri non lo sono.
Si può riconoscere se un numero è razionale o meno dal suo allineamento decimale con segno, ossia se e solo se le cifre decimali sono in numero finito, esempio: $2{,}5 = -\frac{5}{2}$, oppure se è un numero periodico, esempio: $1{,}\bar{3} = \frac{4}{3}$. In generale un numero reale è razionale se e solo se:

- le cifre decimali sono in numero finito;
- il numero decimale è periodico.

Importanza dei numeri razionali:

- SEMPLICITA': i numeri razionali sono semplici perchè si possono scrivere come il rapporto di due numeri interi;
- ogni numero reale si può approssimare bene quanto si vuole con un numero razionale, infatti dato un certo numero $sc_1c_2...c_n,d_1d_2d_3...$ posso prendere la successione $q_k = sc_1c_2...c_n,d_1d_2d_3...d_k$ e basta, ossia basta troncarlo dopo molte cifre decimali; Prendiamo, per esempio, un numero reale NON razionale. Quindi, dato un certo numero reale che ha uno sviluppo decimale non periodico, possiamo sempre prendere *k* valori (un numero finito di cifre) dopo la virgola. Questo permette di avere comunque un numero razionale perchè ha un numero finito di cifre decimali e una ottima approssimazione se si prende un numero di cifre decimali comunque grande (*10* o *20* cifre dopo la virgola).

Definizione di x^n per $x > 0$ e $n \in Z^+$.
Estensione a $x \in \Re$ per *n* dispari.
Definizione di $\sqrt[n]{x_0}$ per $x \geq 0$.
$x^n \cdot x^k = x^{n+k}$; $\left(x^n\right)^k = x^{nk}$.
Potenze e radicali
$\Re^+$ = insieme dei numeri reali positivi
n= numeri interi positivi (dal numero *1* in poi)
Z^+ = insieme dei numeri interi positivi
Definizione: $x^n = \underbrace{x \cdot ... \cdot x}_{n\_volte}$ dove $x \in \Re^+$ e $n \in Z^+$ (vale anche per a^n, $a \in \Re$), che significa il prodotto di *x* per se stesso *n* volte. Quindi: elevare un numero positivo a un numero intero qualunque, anch'esso positivo, vuol dire moltiplicare il numero positivo per se stesso tante volte quanto indicato dall'esponente. Quanto detto vale anche per la potenza a^n dove *a* è un numero reale qualunque anche negativo $a \in \Re$; in questa definizione il segno della base non interviene.
Definizione: la radice ennesima di un certo valore x_0 si rappresenta come segue: $\sqrt[n]{x_0}$; x_0 è un numero reale positivo che può anche essere nullo e si rappresenta $x_0 \in [0,+\infty)$, cioè l'insieme di tutti i numeri reali maggiori di ZERO compreso lo ZERO. E' per questo motivo che, sulla sinistra, abbiamo una parentesi quadra che vuol significare che il numero ZERO, che non è un numero reale positivo, appartiene a questo insieme, quindi x_0 può essere un numero reale positivo o anche uguale a ZERO. Quindi, la radice ennesima di x_0 (ovvero $\sqrt[n]{x_0}$) è quell'unico numero reale *y* non negativo tale che $y^n = x_0$ (x_0 è lo stesso che figura sotto radice). Si può facilmente dire che l'estrazione di radice ennesima è l'operazione inversa dell'elevamento all'ennesima potenza; definito l'elevamento a potenza x^n, dato il risultato x_0, trovare la base tale che questa potenza ennesima sia effettivamente x_0.
Esempio: troviamo la radice quadrata di *4* applicando la definizione (nel caso di radice quadrata, *n* non si indica).

Il quesito ci chiede di trovare quell'unico numero $y=\sqrt{4}$, cioè quell'unico numero y non negativo tale che $y^2=4$. Abbiamo anche definito che $x_0=4$ e $n=2$. Quindi: $y=\sqrt{4}\rightarrow y^2=4$, ovvero $y=2$; 2 è quell'unico numero reale non negativo il cui quadrato è 4.
Si sottolinea il fatto che nella frase precedente c'è scritto "non negativo" in quanto $(-2)^2=4\rightarrow(-2)\cdot(-2)=4$. Quindi -2, numero il cui quadrato è $=4$, non "appartiene" alla definizione in quanto la stessa definizione esclude i numeri negativi.
Esempio: risolviamo l'equazione $y^2=4$.
Cosa si intende con "risolvere una equazione?". Risolvere una equazione vuol dire trovare tutti i numeri reali (almeno per il corso di Analisi I) che sostituiti a y soddisfano l'uguaglianza.
In base alla definizione di radice quadrata, sappiamo che $+2$ e -2 risolvono l'equazione. Queste sono le uniche soluzioni. Possiamo quindi affermare che: $y=+2$ e $y=-2$; semplificando la scrittura avremo: $y=\pm 2$.

Per comodità di calcolo attraverso un qualsiasi calcolatore, si consideri che $\sqrt[n]{x_0}=(x_0)^{\frac{1}{n}}$, questa scrittura si può anche trovare nella forma $x_0\wedge\left(\frac{1}{n}\right)$. E' quindi possibile eseguire il calcolo di una qualsiasi radice ennesima attraverso la seguente: $x_0\wedge\left(\frac{1}{n}\right)$. Esempio: risolviamo l'equazione $y^2=3$. Soluzione: $y=\pm\sqrt{3}$, ovvero $\sqrt{3}$ è quel numero che elevato al quadrato da come risultato 3, infatti: $\left(\sqrt{3}\right)^2=3$. Ma anche $\left(-\sqrt{3}\right)$ elevato al quadrato da come risultato 3, infatti: $\left(-\sqrt{3}\right)^2=3$.
NB: con la limitazione che n sia dispari, si può definire $\sqrt[n]{Z}$ con $Z\in\Re$ come quell'unico numero reale $y\in\Re$ tale che $y^n=Z$. Questo vuol dire che con esponenti dispari si può calcolare la radice ennesima di numeri negativi. Esempio: risolvere le seguenti equazioni
$y^2=36\rightarrow y^2=6^2\rightarrow y=\pm 6$; y ha quindi due soluzioni;
$y^2-5^2=0\rightarrow y^2=5^2\rightarrow y=\pm\sqrt{5}$; y ha quindi due soluzioni;
$y^2+1=0\rightarrow y^2=-1\rightarrow y=$ non ha soluzioni reali ma due soluzioni complesse: $y=\pm i$, perchè ogni numero reale elevato al quadrato, per la regola dei segni, risulterà positivo o eventualmente nullo, infatti se y un numero reale negativo il suo quadrato sarà positivo, se y è un numero reale positivo il suo quadrato sarà positivo, se $y=0$ il suo quadrato è uguale a ZERO. Per quanto detto si afferma che y^2 è una quantità non negativa per ogni numero reale y. Quando a y^2, che è un numero reale non negativo, aggiungo 1, il risultato, cioè il primo membro $\left(y^2\right)$ dell'equazione $y=-1$, è un numero reale maggiore di uno: >1 o, eventualmente uguale ad uno $=1$; possiamo anche scrivere: $y^2\geq 1$. Quanto detto ci dimostra che l'equazione $y^2+1=0$ non ha soluzioni reali proprio perchè qualunque numero reale sostituito al valore della y elevata al quadrato fa si che il primo membro sia maggiore o eventualmente uguale a uno e non uguale a ZERO. Possiamo anche aggiungere che: risolvere l'equazione significa trovare quei numeri reali che sostituiti al posto dell'incognita, in questo caso al posto della y, soddisfano l'uguaglianza. Calcolare le seguenti radici significa anche scrivere:
$y^2=\sqrt{25}\rightarrow y^2=5^2\rightarrow y=5$; $y^5=\sqrt[5]{32}\rightarrow y^5=2^5\rightarrow y=2$; $y^3=\sqrt[3]{27}\rightarrow y^3=3^3\rightarrow y=3$;
$y^4=\sqrt[4]{-64}\rightarrow y=$ non è definita nel campo dei numeri reali.
Principali proprietà dell'elevamento a potenza:
$x^n\cdot x^k=x^{n+k}$, sotto l'ipotesi che x sia positivo e che n e k siano due interi positivi si dimostra che: $x^n=\overbrace{x\cdot\ldots\cdot x}^{n}$, $x^k=\overbrace{x\cdot\ldots\cdot x}^{k}$, quindi, secondo la proprietà associativa, avremo: $x^{n+k}=\underbrace{x\cdot\ldots\cdot x}_{(n+k)volte}$;

$\left(x^n\right)^k = x^{n \cdot k} \rightarrow \underbrace{\left(\underbrace{x \cdot \ldots \cdot x}_{n}\right) \cdot \left(\underbrace{x \cdot \ldots \cdot x}_{n}\right) \cdot \left(\underbrace{x \cdot \ldots \cdot x}_{n}\right)}_{k\_volte}$ ovvero x^n moltiplicato per se stesso k volte. Possiamo quindi scrivere: $\left(x^n\right)^k = x^{n \cdot k^k}$