Cenni ai principali connettivi logici.

Comportamento delle funzioni sent, cost e tgt agli estremi degli insiemi di definizione.

Mettiamo in evidenza un legame che sussiste tra i circuiti logici e la logica simbolica.
In particolare i cosiddetti connettivi logici, che si possono vedere come la controparte dei circuiti logici nella logica simbolica. I connettivi logici all'interno della logica simbolica giocano il ruolo che i circuiti logici elementari giocano in elettronica. I connettivi logici più comunemente usati sono i seguenti:
$\wedge$ la congiunzione logica,
$\vee$ la disgiunzione,
$\Rightarrow$ l'implicazione logica,
$\Leftrightarrow$ l'equivalenza;
questi sono i connettivi logici più usati fra i connettivi cosiddetti binari perché prendono due argomenti proprio come le porte logiche che prendono due argomenti e a seconda delle tensioni che si registrano sui due ingressi rimane determinata la tensione in uscita.
Un comportamento analogo in logica simbolica ce l'hanno i connettivi logici. Essi prendono due argomenti, ad esempio la congiunzione logica $\wedge$, che corrisponde alla porta logica comunemente chiamata AND, funziona nella stessa maniera della porta AND, prende due ingressi che posso chiamare A e B e il risultato anziché essere una tensione, che viene rappresentata come 0 o 1 se è presente o assente una tensione (che è un modo di dire perché le tensioni variano entro certi intervalli e se la tensione è minore di una certa soglia viene considerata come se non ce ne fosse, se invece la tensione è superiore a quella soglia viene considerata come se ce ne fosse) e simbolicamente l'assenza o la presenza di tensione vengono rappresentati con 0 e 1.
In logica simbolica si considerano gli enunciati cioè delle affermazioni che possono essere vere o false, e si fa corrispondere lo 0 alle affermazioni false e l'1 a quelle vere e i connettivi si mettono in mezzo a due enunciati; allora a seconda del valore di verità dei due enunciati il costrutto ottenuto in questo modo è un nuovo enunciato che sarà vero o falso a seconda dei valori di verità dei due enunciati di partenza. Il funzionamento dei connettivi logici è determinato dalla loro tavola di verità.

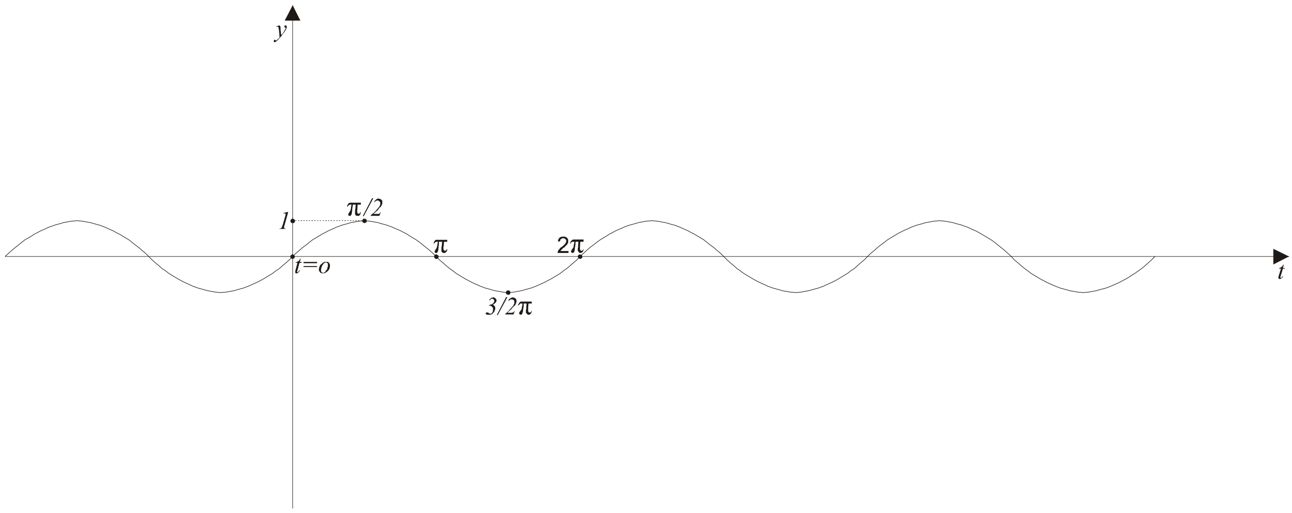
A	B	$A \wedge B$	A	B	$A \vee B$	A	B	$A \Rightarrow B$	A	B	$A \Leftrightarrow B$
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1
0	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0
			0	0	0	0	0	1	0	0	1

$A \wedge B$ A e B (l'enunciato A e B è vero quando sia A che B sono veri altrimenti è falso)
$A \vee B$ A o (vel) B (non appena uno dei due ingressi è vero anche l'enunciato così costruito è vero)
$A \Rightarrow B$ A implica B (se … allora) B (quando A vale 1 anche B deve valere 1)
$A \Leftrightarrow B$ A equivalente B (se e solo se) (A vale 1 anche B deve valere 1, A vale 0 anche B deve valere 0, quando A e B hanno valori di verità diversi la doppia implicazione A se e solo se B risulta falsa)
Per concludere parliamo del connettivo unario NON che corrisponde alla porta logica NOT-
Si chiama connettivo unario perché prende un solo ingresso. Il funzionamento del NON è molto facile: prende un solo ingresso A e l'enunciato non A
A $\neg$ A risulta vero quando A è falso e falso quando A è vero.

A	$\neg$ A
0	1
1	0

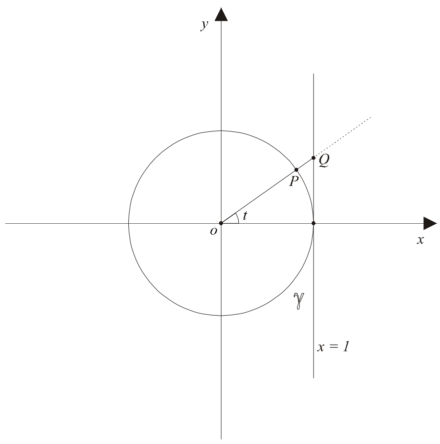
Riepilogo:
1. Periodicità
2. Parità o disparità
3. Monotonia
4. Concavità o convessità

Resta da esaminare il comportamento cosiddetto agli estremi dell'insieme di definizione.
Consideriamo la funzione *f(t)=sent*.
L'insieme di definizione di questa funzione è $\Re$, l'insieme dei numeri reali, ossia l'insieme di quei valori reali che possono essere assegnati alla variabile *t*. Si possono prendere tutti i numeri reali, anche maggiori di 2π e minori di *0*.
Studiare il comportamento agli estremi significa studiare i valori di *sent* quando *t* diventa molto grande e anche quando il valore assoluto di t ossia $|t|$ diventa molto grande è $t<0$.
Quindi ci sono due studi da fare, ossia cosa succede di *sent* quando *t* diventa molto grande e cosa succede di *sent* quando *t* è negativo e grande in valore assoluto. Lo studio si può liquidare in quattro parole perché sappiamo dalla definizione di *sent* che tale funzione assume valori che vanno da *-1* a *1* ed è anche periodica di periodo 2π. Conosciamo anche l'andamento grafico di questa funzione che è del tipo in figura sull'intervallo da *0* a 2π.



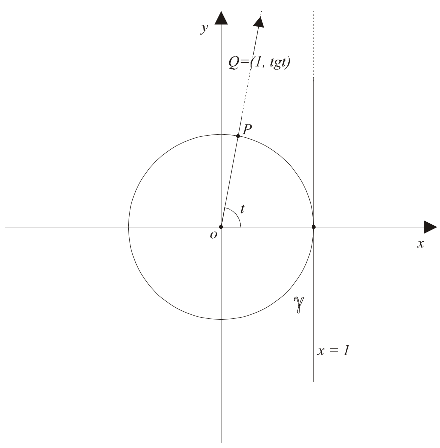
Per accertare che il grafico è questo attualmente noi possiamo calcolare *sent* per particolari valori di *t*, per esempio per $t=0$, per $t=\pi$, per $t=\frac{\pi}{2}$, per $t=\frac{3}{2}\pi$, per $t=2\pi$, e altri, e troviamo ad esempio che quando $t=0$ $\rightarrow$ $sent=0$, quando $t=\frac{\pi}{2}$ $\rightarrow sent=1$, e similmente si determinano altri punti notevoli lungo questo grafico.
Poi si può fare uno studio di monotonia sempre basato sulla definizione, cioè si può capire per esempio che quando *t* varia nell'intervallo da $\frac{\pi}{2}$ a $\frac{3}{2}\pi$ la funzione risulta strettamente decrescente, cioè all'aumentare dell'argomento *t* i valori di *sent* diminuiscono, e questo si vede dalla definizione. Invece il capire la concavità e la convessità, cioè che la funzione come si vedere nel grafico è concava sull'intervallo $0 \rightarrow \pi$, convessa sull'intervallo $\pi \rightarrow 2\pi$, viene molto facile quando si sono messi a punto gli strumenti tipici dell'analisi matematica come faremo in seguito. Ricapitolate queste informazioni che sono già in nostro possesso, il gioco è finito perché la periodicità dice che i valori di *sent* si ripetono con periodo 2π e anche periodicamente si ottiene ciò. La sola periodicità ci permette di capire cosa succede per *t* molto grande, e anche quando il valore assoluto di *t* è grande e *t* è minore di *0*; cioè non succede niente di nuovo: la funzione ripete gli stessi valori che ha assunto nell'intervallo $0 \rightarrow 2\pi$.
Lo studio del comportamento agli estremi di *cost* è analogo: per la funzione *g(t)=cost* basta osservare che $\cos t = sen\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$, perché angoli complementari sono legati da questa relazione e quindi le informazioni raccolte su questa funzione, a meno di un cambiamento di variabile molto semplice, si ripercuotono su *cos*.

Figura 1



Andiamo a vedere un caso più interessante che è la funzione *h(t)=tgt*, tangente trigonometrica. Ricordiamo che la definizione si fa considerando la circonferenza trigonometrica nel piano cartesiano *xy* e considerando la retta di equazione *x=1*. Dopodiché si prende un *t* tale che la differenza con $\frac{\pi}{2}$ non sia un multiplo di *π*, cosa che si può scrivere così: $t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$. Questo perché quando si va a prendere l'angolo *t*, cioè quando si prende *t* interpretato come un angolo e quindi si individua quel punto *P* sulla circonferenza trigonometrica, succede che la retta $\overline{OP}$, per poter procedere nella definizione deve intersecare la retta *x=1* in un certo punto *Q*. Gli estremi dell'insieme di definizione adesso sono i punti dove *tg* non è definita, cioè sono i punti $\frac{\pi}{2} + k\pi$. Facciamo un'interpretazione grafica. Disegniamo $\frac{\pi}{2}$, e cominciamo a ragionare su questo. Mettiamo *k=0* per incominciare poi gli altri sono facili. Studiamo solo $\frac{\pi}{2}$.

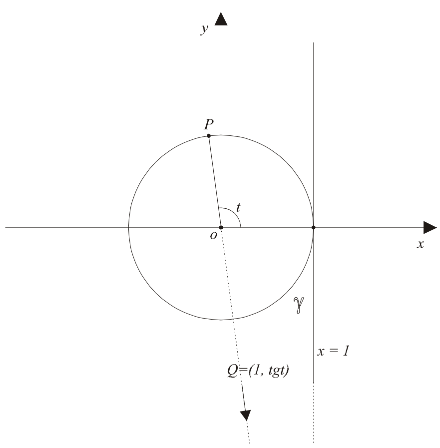
Figura 2 .



Allora ci dobbiamo chiedere: cosa succede quando $t \neq \frac{\pi}{2}$ vi si avvicina? Rispondere a questa domanda significa studiare il comportamento di questa funzione vicino a uno degli estremi del suo campo di definizione. Per rispondere ci serviamo sempre della definizione di *tgt*, cioè diamo all'angolo *t* non il valore scelto per la figura *1* ma uno che si avvicini a $\frac{\pi}{2}$ come in figura 2 e quindi non sarà possibile rappresentare il punto *Q* che è l'intersezione con la retta *x=1*.

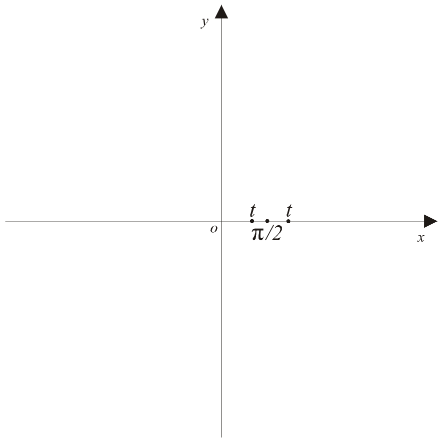
La tangente trigonometrica è per definizione l'ordinata del punto *Q*, quindi dalla definizione si capisce che quando $t \neq \frac{\pi}{2}$ vi si avvicina, i valori della tangente sono grandissimi, quindi succede che i valori di *tgt* diventano enormi. Per completare questo studio dobbiamo prendere in considerazione anche valori dell'argomento *t* che superano $\frac{\pi}{2}$.

Figura 3



Prendiamo un *t* che sia vicino a $\frac{\pi}{2}$ ma maggiore, più grande, così si ottiene il punto *P* sul punto di intersezione del segmento $\overline{OP}$ con la circonferenza e prolungando il segmento sulla retta che lo contiene dalla parte dell'origine si trova un punto che chiamiamo *Q* sull'intersezione con la retta *x=1*. Per definizione l'ordinata del punto *Q* è la tangente trigonometrica del *t* che si è preso. Se il valore di *t* si avvicina ancor di più rispetto al disegno all'angolo retto, sempre rimanendo maggiore di esso, l'inclinazione del segmento $\overline{PQ}$ aumenta e il punto di intersezione *Q* con la retta *x=1* finisce ancora più sotto, quindi possiamo precisare meglio l'affermazione che dice che abbiamo due casi: nel primo i valori di *tgt* diventano grandissimi se $t < \frac{\pi}{2}$, mentre nel secondo caso succede che i valori di *tgt* diventano grandissimi in valore assoluto ma i valori *di tgt* sono negativi se $t > \frac{\pi}{2}$. Dalla definizione arriviamo a queste conclusioni. Adesso mettiamo su di un grafico questi due casi

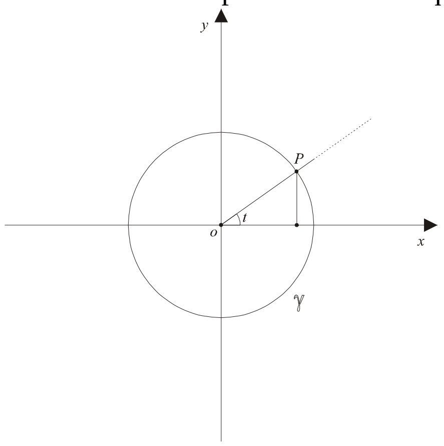
Figura 4



Disegniamo gli assi cartesiani e sull'asse delle *t* mettiamo $\frac{\pi}{2}$, poi prendiamo un valore di vicino a $\frac{\pi}{2}$ ma più piccolo (primo caso), e i risultati sono valori grandissimi, e più *t* si avvicina a $\frac{\pi}{2}$ più i valori di *tgt* aumentano; mentre nel secondo caso *t* è più grande di $\frac{\pi}{2}$ e abbiamo trovato che i valori di *tgt* sono grandissimi in valore assoluto ma negativi, e più *t* si avvicina a $\frac{\pi}{2}$ più il valore assoluto della tangente aumenta sempre restando *tgt* negativa. La rappresentazione grafica vicino a una singolarità come questa crea delle difficoltà ad essere costruita. Possiamo introdurre una notazione per esprimere quello che abbiamo trovato. Si utilizza il concetto di limite e si scrive così: il limite per t che tende a $\frac{\pi}{2}$ con valori di *tgt* più piccoli di $\frac{\pi}{2}$ è uguale $+\infty$: $\lim_{t \to \frac{\pi}{2}^-} tgt = +\infty$,(1° caso figura 4) $t < \frac{\pi}{2}$; invece il limite per *t* che tende a $\frac{\pi}{2}$ con valori di *tgt* più grandi di $\frac{\pi}{2}$ è uguale $-\infty$: $\lim_{t \to \frac{\pi}{2}^+} tgt = -\infty$, (2° caso figura 4) $t > \frac{\pi}{2}$.

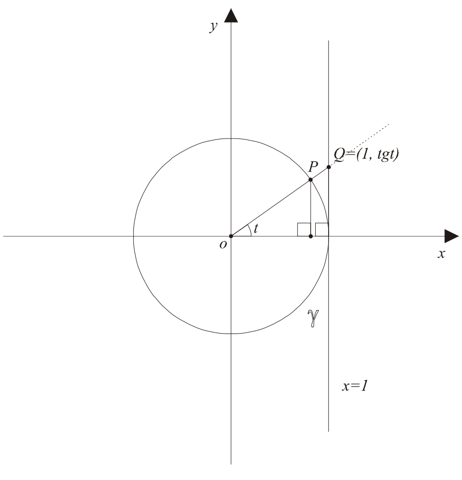
Queste formule esprimono il comportamento della funzione *tgt* quando la variabile *t* vi si avvicina (nella notazione l'avvicinamento è indicato dalla freccia), rimanendo diversa da $\frac{\pi}{2}$ perché se *t* fosse uguale $\frac{\pi}{2}$ la tangente non sarebbe definita. L'esponente – indica che i valori di *t* sono più piccoli di $\frac{\pi}{2}$; l'esponente + indica che i valori di *t* sono più grandi di $\frac{\pi}{2}$; ossia significa che quando prendiamo valori di *t* vicini a $\frac{\pi}{2}$ per studiare il comportamento della funzione dobbiamo prenderli maggiori di $\frac{\pi}{2}$ se l'esponete è +, minori di $\frac{\pi}{2}$ se l'esponente è –. Questo perché se l'argomento *t* è $> \frac{\pi}{2}$ i valori sono grandi in valore assoluto ma negativi, se invece l'argomento *t* è $< \frac{\pi}{2}$ la funzione assume valori positivi enormi, tanto più grandi quanto più *t* è vicino a $\frac{\pi}{2}$. L'esercizio si conclude sfruttando la periodicità, cioè sfruttando il fatto che la funzione *tgt* è periodica di periodo *π*. Infatti oltre a $\frac{\pi}{2}$, valore particolare da cui siamo partiti, bisogna studiare anche quegli altri punti del tipo $\frac{\pi}{2} + k\pi$. Tutti questi sono punti che stanno agli estremi dell'insieme di definizione, quindi l'esercizio andrebbe completato studiando il comportamento della funzione vicino a questi punti; ma questi punti differiscono da quello che abbiamo studiato per un multiplo di *π*, che è *kπ*, e siccome la funzione considerata è periodica di periodo π, il suo comportamento vicino a questi punti è esattamente lo stesso che ha vicino a $\frac{\pi}{2}$.

Prima e seconda formula fondamentale della gonometria.
Formule di addizione, duplicazione, bisezione.
Studiamo alcune formule di trigonometria.
Dopo aver dato la definizione di *sen* e *cos* e *tg* abbiamo studiato le relazioni che intercorrono tra seni e coseni di angoli complementari, supplementari, sfasati di $\frac{\pi}{2}$ e sfasati di π. Esistono moltissime altre relazioni fra le funzioni trigonometriche di angoli legati fra loro in qualche modo. Cerchiamo di illustrarne alcune, quelle che si usano più spesso, e cerchiamo di capire come si arriva ad una formula trigonometrica.
La regina delle formule trigonometriche è questa: per ogni $t \in \Re$ (per ogni valore reale dell'argomento t) risulta che $(sent)^2+(cost)^2=1$, formula che viene chiamata prima formula fondamentale, o prima formula fondamentale della goniometria. La formula discende dal teorema di Pitagora. Basta sfruttare la definizione di seno e coseno. Si prende un valore qualunque dell'argomento t , si determina il punto P come al solito, poi si considera il triangolo rettangolo avente il segmento $\overline{OP}$ come ipotenusa e i cateti perpendicolari agli assi coordinati; applicando il teorema di Pitagora a questo triangolo rettangolo abbiamo che l'ipotenusa al quadrato è uguale alla somma dei quadrati dei cateti. Ma questa è proprio la prima formula fondamentale della goniometria; i cateti di questo triangolo rettangolo misurano rispettivamente valore assoluto di *cost* e valore assoluto di *sent*, e quando si passa ai quadrati si ottiene questa formula. Per evitare le parentesi la formula si può scrivere anche $sen^2t+cos^2t=1$ e il significato non cambia.



Seconda formula fondamentale della goniometria.

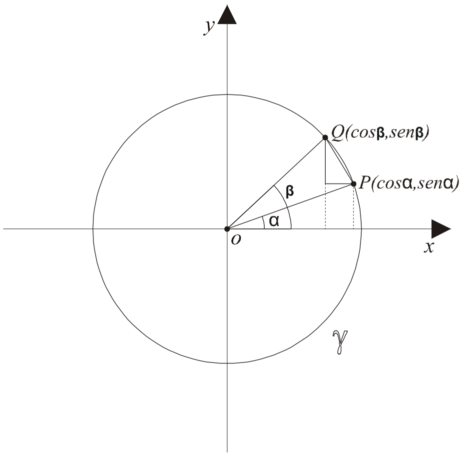
La seconda formula fondamentale discende dal teorema di Talete, e dice così: $tgt = \frac{sent}{\cos t}$; la formula sussiste purchè ambo i membri siano ben definiti, e questo richiede che l'argomento t sia diverso da $\frac{\pi}{2}+k\pi$: $t \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$, ossia per ogni t siffatto risulta valida quell'uguaglianza. Vediamo come la seconda formula fondamentale discende dal teorema di Talete. Ci basiamo sulla definizione di *sen cos* e *tg*.
Prendiamo un valore di t non singolare e consideriamo affianco alla circonferenza trigonometrica la retta di equazione $x=1$, quindi abbiamo un punto P sulla circonferenza trigonometrica ed un altro punto che indico con Q sulla retta $x=1$, e possiamo costruire due triangoli dei quali uno ha per ipotenusa il segmento $\overline{OP}$ e l'altro ha per ipotenusa il segmento $\overline{OQ}$ ed entrambi hanno i cateti paralleli agli assi coordinati. I triangoli sono tutti e due rettangoli e inoltre hanno l'angolo t in comune, quindi sono simili, e quindi hanno i lati in proporzione. Scrivendo la proporzione che sussiste per i loro lati arriviamo alla seconda formula fondamentale della goniometria. Vogliamo ricavare *tgt* ossia l'ordinata del punto Q: il cateto verticale del triangolo più grande , che è *tgt* nella figura sta al cateto orizzontale dello stesso triangolo, che però misura *1* perché coincide con il raggio della circonferenza trigonometrica che è unitario per definizione, come il cateto verticale del triangolo più piccolo sta al suo cateto orizzontale: $\frac{tgt}{1} = \frac{sent}{\cos t} \rightarrow tgt = \frac{sent}{\cos t}$. Naturalmente la costruzione in figura



identifica seni e coseni con lunghezze di segmenti e quindi è possibile solo quando seni e coseni sono positivi, riconosciuta la validità di questa formula, con questa restrizione potrei estenderla anche ai casi in cui seno e coseno assumessero valori negativi, e la conclusione e che essa vale per ogni valore non singolare dell'argomento *t*; i valori singolari sono quelli dove la tangente trigonometrica non è definita, cioè tutti quei valori che differiscono da $\frac{\pi}{2}$ per un multiplo di π. Dopo la prima e la seconda formula fondamentale le altre formule più usate in assoluto della trigonometria sono le cosiddette *formule di addizione*. Esse esprimono il seno e il coseno della somma e della differenza di numeri reali: seno della somma, seno della differenza, coseno della somma e coseno della differenza. Si usano talmente spesso che si finisce per impararle a memoria.

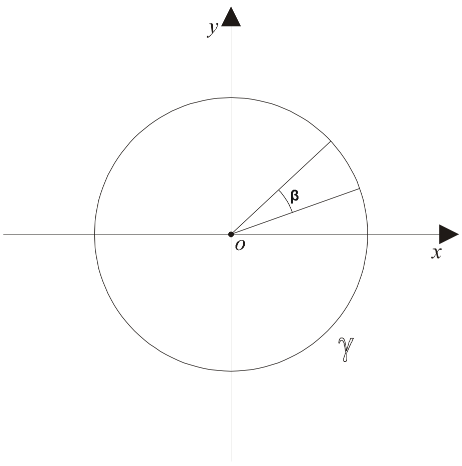
- Il seno della somma si può esprimere come la somma del prodotto: $sen\,\alpha\,cos\,\beta+cos\,\alpha\,sen\,\beta$;
- mentre il seno della differenza si può esprimere come $\text{sen}\,\alpha\,\cos\beta-\cos\alpha\,\text{sen}\,\beta$;
- per quanto riguarda il coseno della somma esso si esprime come $cos\,\alpha\,cos\,\beta-sen\,\alpha\,sen\,\beta$;
- infine coseno della differenza è uguale a $cos\,\alpha\,cos\,\beta+sen\,\alpha\,sen\,\beta$.

Come ricavare queste formule dalla definizione di seno e coseno. Seguiamo l'impostazione del testo "precalculus". Proviamo a ricavare l'ultima delle quattro per prima. Considero la circonferenza trigonometrica, prendo due angoli α e β, individuo di conseguenza un punto *P* e un altro *Q* sulla circonferenza trigonometrica, e vado a esprimere la lunghezza del segmento $\overline{PQ}$.

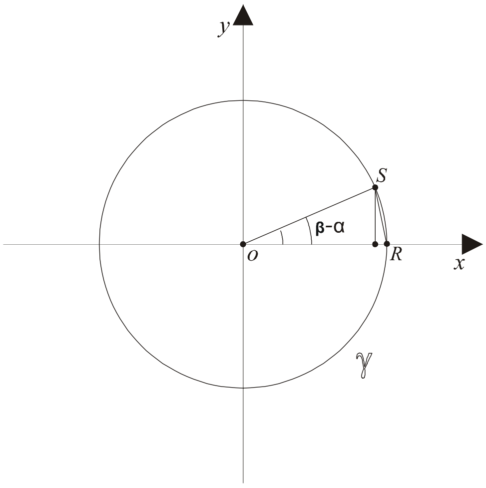


Per trovare la lunghezza del segmento $\overline{PQ}$ uso il teorema di Pitagora. Ogni qualvolta si hanno due punti nel piano cartesiano e si conoscono le loro coordinate, che nel caso considerato sono $P=(cos\,\alpha,sen\,\alpha)$ e $Q=(cos\,\beta,sen\,\beta)$, si può trovare la lunghezza del segmento che li congiunge, nel caso considerato $\overline{PQ}$, usando il teorema di Pitagora. Cioè si costruisce un triangolo rettangolo che ha il segmento che ci interessa come ipotenusa e i cateti paralleli agli assi coordinati come in figura. Dopodiché si applica il teorema di Pitagora che dice che l'ipotenusa al quadrato è uguale alla somma del quadrato dei cateti; la lunghezza di un segmento parallelo all'asse delle *x* si ottiene facendo la differenza tra le ascisse degli estremi, ossia nel caso in figura $cos\,\alpha-cos\,\beta$, e la lunghezza di un segmento parallelo all'asse delle *y* si ottiene facendo la differenza tra le ordinate degli estremi, ossia nel caso in figura: $sen\,\alpha-sen\,\beta$.

Quindi: $\overline{PQ}^2=(cos\,\alpha-cos\,\beta)^2+(sen\,\alpha-sen\,\beta)^2$, svolgiamo i quadrati perché ci sono delle semplificazioni da fare; otteniamo: $cos^2\alpha+cos^2\beta-2cos\,\alpha\,cos\,\beta+sen^2\alpha+sen^2\beta-2sen\,\alpha\,sen\,\beta$; ma la prima identità fondamentale della goniometria dice che: il cos^2 di qualunque angolo α+ il sen^2 di qualunque angolo α da *1*, indipendentemente dal valore di α, quindi al posto di $cos^2\alpha+sen^2\alpha$ scriviamo *1* sfruttando la prima identità fondamentale della goniometria; inoltre abbiamo anche un $cos^2\beta+sen^2\beta$, che secondo la prima identità fondamentale è uguale *1*,indipendentemente dal valore di β; quindi possiamo esprimere il quadrato della distanza tra i punti *P* e *Q* avvalendoci del teorema di Pitagora e della prima identità fondamentale della goniometria come segue: $\overline{PQ}^2=1+1-2cos\,\alpha\,cos\,\beta-2sen\,\alpha\,sen\,\beta=2-2cos\,\alpha\,cos\,\beta-2sen\,\alpha\,sen\,\beta$.



Nota bene: in certi casi se vogliamo un risultato positivo può rendersi necessario fare $\cos\beta-\cos\alpha$. Se nell'asse delle *x* ho due punti *P* e *Q* e voglio sapere la lunghezza del segmento che li congiunge $\overline{PQ}$, farò la differenza tra l'ascissa di *Q* e l'ascissa di *P*, e devo fare l'ascissa di *Q*– l'ascissa di *P* affinché mi venga un risultato positivo. Scrivendo il teorema di Pitagora non ci intersessa il problema dei segni perché dobbiamo fare il quadrato dei valori. Ora faccio il disegno perché voglio far intervenire $\beta-\alpha$, che rappresento in figura da solo, e non erroneamente, perché sebbene β e α incomincino dal semiasse delle *x* positive la loro differenza rimane appesa e non va a toccare il semiasse delle *x* positive.



Ma io voglio rappresentare l'angolo $\beta-\alpha$ da solo nella circonferenza trigonometrica e quindi ridisegno tale angolo iniziando dal semiasse delle *x* positive, e poi voglio trovare la lunghezza del segmento di estremi *S* ed *R*, ossia voglio esprimere la lunghezza del segmento $\overline{RS}$ (che è uguale al segmento $\overline{PQ}$ perché l'angolo che gli sottende è lo stesso; $\overline{RS}$ e $\overline{PQ}$ sono corde sottese dallo stesso angolo al centro nella circonferenza di raggio uguale quindi devono generare lo stesso risultato). Per esprimere $\overline{RS}$ costruisco un triangolo avente il segmento che ci interessa come ipotenusa e i cateti paralleli agli assi coordinati come in figura, poi mi servo del teorema di Pitagora che dice che l'ipotenusa al quadrato è uguale alla somma del quadrato dei cateti come già fatto precedentemente. La tecnica è sempre la stessa : per trovare le lunghezze dei cateti ho bisogno delle coordinate degli estremi *S* ed *R*: il punto *R* chiaramente ha coordinate *(1,0)* perché sta coricato nell'asse delle *x* e perché il raggio della circonferenza è unitario: *R=(1,0)*; le coordinate di *S* sono: l'ascissa è il coseno dell'angolo $\beta-\alpha$ e la sua ordinata è seno dell'angolo $\beta-\alpha$: $S=((cos(\beta-\alpha),sen(\beta-\alpha))$; quindi sfruttando le coordinate di *S* ed *R* posso esprimere $\overline{SR}^2$ (differenze delle ascisse al quadrato più differenze delle ordinate al quadrato):
$\overline{SR}^2 = (1-cos(\beta-\alpha))^2+(0-sen(\beta-\alpha))^2 \to \overline{SR}^2 = (1^2-(2\cdot 1(cos(\beta-\alpha))+cos^2(\beta-\alpha))+(-sen(\beta-\alpha)))^2$
Ma il $(cos(\beta-\alpha))^2$ si può sommare con il $(sen(\beta-\alpha))^2$ usando la prima identità fondamentale della goniometria e si trova *1*: $cos^2(\beta-\alpha)+sen^2(\beta-\alpha)=1$, quindi:

$$\overline{SR}^2 = (1-2cos(\beta-\alpha))+(cos^2(\beta-\alpha))+sen^2(\beta-\alpha)=1-2cos(\beta-\alpha)+1=2-2cos(\beta-\alpha)$$

Ora procediamo uguagliando la prima formula con la seconda:
$-2cos\,\alpha\,cos\,\beta-2sen\alpha sen\beta=2-2cos(\beta-\alpha)$; in entrambe le formule c'è il termine 2 quindi divido ambo i membri per 2 e me ne sbarazzo, poi cambio i segni ad ambo i membri e ottengo:
$cos\,\alpha\,cos\,\beta+sen\alpha sen\beta=cos(\beta-\alpha)$; quindi ho concluso la dimostrazione della quarta formula di addizione. La funzione *cost* è una funzione periodica di periodo 2π ed è pari, il che significa che scambiando il segno dell'argomento il risultato non cambia, quindi: $cos(\beta-\alpha)=cos(\alpha-\beta)$, perchè la funzione è pari.
Adesso vediamo se è possibile ricavare la penultima dall'ultima cambiando β in $-\beta$, cioè prendiamo per buona l'ultima che abbiamo dimostrato e poniamo $\beta=-\gamma$; se al posto di β mettiamo $-\gamma$ troviamo :
$cos(\alpha+\gamma)=cos\,\alpha\,cos\,\gamma+sen\alpha sen(-\gamma)$ (scrivo $cos\,\gamma$ e non $cos(-\gamma)$perché *cos* è una funzione pari, infatti *cos+t* e *cos–t* sono uguali); ma il seno è una funzione dispari quindi $sen(-\gamma)=-sen\,\gamma$, per cui:
$cos(\alpha+\gamma)=cos\,\alpha\,cos\,\gamma+(-sen\alpha sen\gamma) \to cos(\alpha+\gamma)=cos\,\alpha\,cos\,\gamma-sen\alpha sen\gamma$; se a questo punto sostituiamo β con γ nelle tre occorrenze della formula, troviamo la penultima, $\alpha+\gamma$ o $\alpha+\beta$, è la stessa cosa.
Vediamo le prime due formule di addizione. Come si possono togliere le formule per i seni da quelle dei coseni? Basta sfruttare la relazione fra angoli supplementari, cioè dire che $sen(\alpha+\beta)=cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right)$; sappiamo che passando da un angolo ($(\alpha+\beta)$ al suo complementare che è $\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right)$ seno diventa coseno e viceversa e queste sono le relazioni fra angoli complementari. Quindi posso ridurre il seno di una somma $(\alpha+\beta)$ al coseno di una differenza e poi applico la formula del coseno della differenza, e quindi

trovo: $=cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)cos(\beta)+sen\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)sen(\beta)$; ancora per le relazioni fra angoli complementari $cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=sen\alpha$, e il $sen\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=cos\,\alpha$, quindi $sen(\alpha+\beta)=sen\alpha\cos\beta+\cos\alpha sen\beta$; la seconda formula si ricava facilmente dalla prima, cambiando il segno di β; Se metto $-\beta$ al primo membro ottengo: $sen(\alpha-\beta)=sen\alpha\cos\beta-\cos\alpha sen\beta$; al secondo membro, se metto $-\beta$ alposto di β il *cos* non cambia perché il coseno è una funzione pari, il *sen* invece cambia di segno perché è una funzione dispari, quindi la seconda formula discende immediatamente dalla prima.

Queste dimostrazioni non vengono chieste all'esame.

Dopo le formule di addizione è naturale occuparsi delle cosiddette formule di duplicazione.

In pratica si tratta di esprimere $sen2\alpha$ e $cos2\alpha$, da cui il nome formule di duplicazione, ossia esprimere *sen* e *cos* di 2α in termini di *sen* e *cos* di α e basta. Questo è facile perché per il $sen2\alpha$ basta chiamare $\beta\to\alpha$: $sen2\alpha=sen\alpha\cos\alpha+sen\alpha\cos\alpha=2sen\alpha\cos\alpha$, similmente per $cos2\alpha$ guardo la terza formula e trovo $cos2\alpha=cos^2\alpha-sen^2\alpha$. Dalla seconda formula di duplicazione escono fuori delle interessanti formule che permettono di sbarazzarsi dei quadrati qualora ciò fosse necessario. Voglio dire che $cos2\alpha$ si può esprimere facendo appello alla prima identità fondamentale della goniometria cioè al posto di $cos^2\alpha$ si può scrivere $(1-sen^2)\alpha$ perché sappiamo che $sen^2+cos^2=1$, poi c'è un altro $-sen^2$, quindi: $cos\,2\alpha=(1-sen^2)\alpha-sen^2\alpha=1-2sen^2\alpha$, al posto di sen^2 scriviamo $1-cos^2$ tenendo presente che c'è un – davanti quindi verrà $cos\,2\alpha=1-2(1-cos^2)\alpha=1-2+2cos^2\alpha=2cos^2\alpha-1$.

Queste formule si usano normalmente esplicitando i quadrati, cioè da queste formule esplicitando i quadrati si trova, dalla prima formula: $cos\,2\alpha=1-2sen^2\alpha\to sen^2\alpha=\frac{1-cos\,2\alpha}{2}$

e dalla seconda formula: $cos\,2\alpha=2cos^2\alpha-1\to cos^2\alpha=\frac{1+cos\,2\alpha}{2}$.

Queste formule sono utili perché permettono di ricondurre i quadrati di seni e coseni a espressioni che quadrati non ne hanno, a prezzo di raddoppiare l'argomento, invece di α c'è 2α; talvolta, per esempio per fare integrali questo può essere conveniente. Estraendo le radici quadrate da queste ultime due formule si trovano le cosiddette formule di bisezione. Nei formulari sono scritte con la notazione del + e del – che però si presta a equivoci. Proviamo ad allontanarci da quello che troviamo nei formulari e nei libri, per scrivere più in dettaglio quello che risulta, ossia che :

$sen\alpha=\sqrt{\frac{1-cos\,2\alpha}{2}}$ se $sen\,\alpha\geq 0$; mentre $sen\alpha=-\sqrt{\frac{1-cos\,2\alpha}{2}}$ se $sen\,\alpha<0$; le formule precedenti valgono indipendentemente dai segni di seno e coseno, anche perchè elevando al quadrato i segni non giocano nessun ruolo, quando però vuoi esplicitare seno e coseno sbarazzandoti dei quadrati, allora devi tener conto del segno. Per il coseno vale lo stesso discorso:

$cos\,\alpha=\sqrt{\frac{1+cos\,2\alpha}{2}}$ se $cos\,\alpha\geq 0$, $cos\,\alpha=-\sqrt{\frac{1+cos\,2\alpha}{2}}$ se $cos\,\alpha<0$.

Esercizi

1. Dire quante soluzioni reali ha l'equazione $x^2=a$ dove a è un parametro reale.
2. Partendo dalle formule di addizione ricavare i legami fra i seni e i coseni di angoli complementari, supplementari, e sfasati di $\frac{\pi}{2}$ e di π.