

Concetto di equazione di un luogo geometrico nel piano.

I luoghi: $x=cost$ e $y=cost$

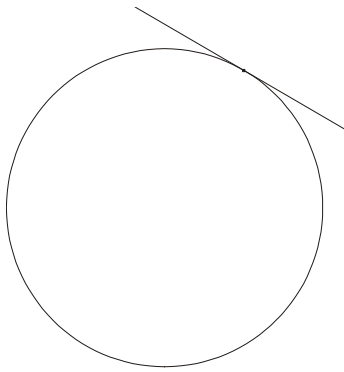
L'equazione della retta in forma esplicita

Equazione della retta nel piano cartesiano.

Va conosciuta e va saputa utilizzare molto bene perché la retta è una delle curve più semplici che esistono, perciò, in virtù della sua semplicità, viene utilizzata per semplificare i calcoli anche quando la linea considerata non è rettilinea.

Uno dei capisaldi del corso di analisi matematica è proprio una parte della teoria che riguarda la possibilità di approssimare con una retta una linea che rettilinea non è.

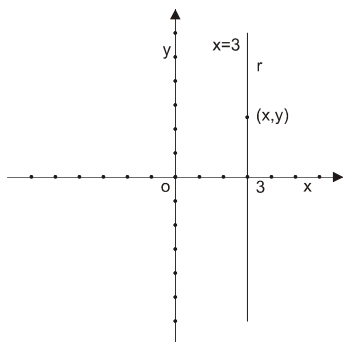
Mi riferisco, per essere più esplicito, alla retta tangente ad una curva data.



Faccio un esempio. Se prendo una circonferenza e una retta tangente ad essa, da un lato è chiaro che le due linee sono diverse, perché una è una retta e l'altra è una circonferenza, d'altro canto però dovrebbe essere abbastanza chiaro che vicino al punto di tangenza le due linee sono molto simili tra loro.

Gli antichi credevano che la terra fosse piatta perché, pur essendo la superficie terrestre curva, essa è talmente grande rispetto alle dimensioni della persona umana, che è impossibile disegnare un omino su un cerchio rispettando la scala effettiva, l'omino dovrebbe essere piccolissimo, talmente piccolo che sarebbe invisibile nel contesto, quindi rispetto all'omino la superficie curva della terra ed il piano tangente ad essa sono indistinguibili ai sensi umani, ad esempio il mare sembra piatto ma, se ci pensiamo, esso accompagna la curvatura della terra. Ecco cosa intendo quando parlo di approssimazione di una curva con una retta.

Ma parliamo dell'equazione di una retta nel piano.

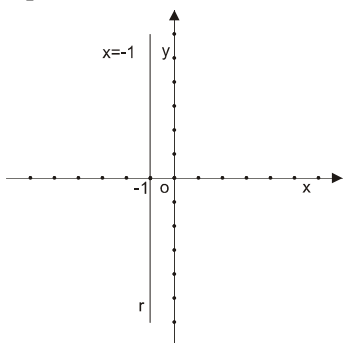


Voglio iniziare con il discutere in generale sull'equazione di un luogo geometrico, che non è tenuto ad essere necessariamente una retta. Cioè voglio parlare di come si fa ad associare un luogo geometrico (una figura, una linea), nel nostro caso una retta, ad una equazione, ossia come si può mettere in relazione una figura con una equazione. Si sfrutta il fatto che ogni singolo punto del piano cartesiano è rappresentato con una coppia di coordinate x e y , se ho una figura, per esempio la retta r verticale della figura, essa si può rappresentare tramite una equazione.

Per esempio l'equazione $x=3$ rappresenta la retta r perché tutti e soli i punti della retta hanno ascissa $x=3$, che soddisfa quella equazione.

Non solo, se prendiamo un punto che non sta sulla retta r , ma sta per esempio sulla destra o sulla sinistra di essa, la sua ascissa x risulta o maggiore o minore di 3, non uguale. L'equazione $f(x,y)=0$ rappresenta l'insieme o il luogo dei punti del piano le cui coordinate x,y (sostituite a x e y) soddisfano l'equazione stessa.

In questo enunciato ho voluto rappresentare con la notazione $f(x,y)$ una qualunque funzione delle variabili x,y , una qualunque espressione al primo membro che contiene la x e la y uguagliata a 0. Dunque si scrive una equazione e ad essa si associa un luogo geometrico con questa tecnica.



Esempio: cerchiamo il luogo dei punti del piano le cui coordinate x,y sono individuate dall'equazione $x = -1$

Vediamo dunque qual è il luogo dei punti del piano le cui coordinate soddisfano tale equazione. Similmente all'esempio precedente, basta

considerare sull'asse delle x il punto di ascissa -1 e poi la retta parallela

all'asse y che ci passa attraverso. Tutti i punti del piano cartesiano che appartengono alla retta r in figura soddisfano l'equazione, la loro ascissa x

vale -1 , invece i punti fuori da questa equazione, hanno l'ascissa x che può essere maggiore se sono a destra

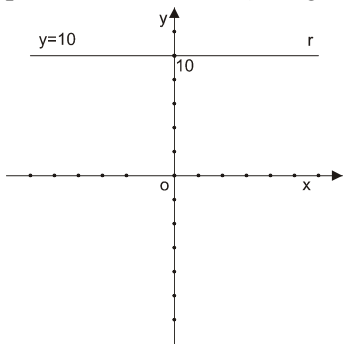
o minore se sono a sinistra di essa. Questo permette di identificare una figura con un'equazione e quindi di trasformare un oggetto geometrico come la retta in un oggetto algebrico come l'equazione.

Questa è stata la rivoluzione rappresentata nella storia della scienza dalla geometria analitica, che con questo espediente ha permesso di trasformare il problema geometrico in un problema algebrico sul quale applicare dei procedimenti di calcolo. Viceversa l'utilità della geometria analitica è che possiamo interpretare delle equazioni come figure e questo ci permette di comprenderle molto meglio.

I vantaggi di questo approccio sono 2:

1. problemi geometrici diventano problemi algebrici e possono essere affrontati con gli strumenti dell'algebra;
2. problemi algebrici possono essere interpretati geometricamente.

Esempio: troviamo il luogo dei punti del piano tali che $y=10$. Si tratta di individuare nel piano xy tutti quei punti la cui ordinata y valga 10 .

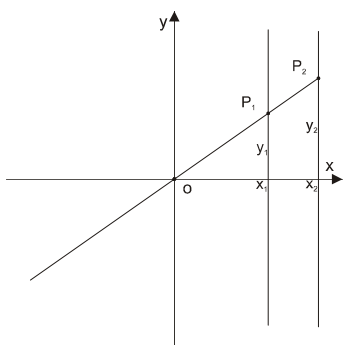


Si troverà una retta parallela all'asse delle x che interseca l'asse delle y nel punto di ordinata 10 . Tutti i punti della retta r soddisfano l'equazione mentre gli altri no. Quindi la retta r identifica l'equazione.

Visti gli esempi non vi è difficoltà a riconoscere che l'equazione del tipo $y=costante$ rappresenta una retta parallela all'asse x , la posizione della retta parallela all'asse x dipende dal valore della costante, che nell'esempio vale 10 , se la costante valesse 15 la retta attraverserebbe l'asse delle y nel punto $(0,15)$, similmente l'equazione $x=costante$ rappresenta una retta parallela all'asse y .

Andiamo avanti con il considerare rette non necessariamente parallele agli assi cartesiani. Una generica retta non parallela all'asse delle y corrisponde all'equazione $y=mx+q$ dove m e q sono costanti opportune.

Vediamo perché. Cominciamo con il considerare una retta sul piano cartesiano non parallela all'asse delle y e passante per l'origine. Dobbiamo trovare la sua equazione. L'equazione della retta non parallela all'asse y e



passante per l'origine dovrà essere soddisfatta da tutti i punti che le appartengono e non dovrà essere soddisfatta da tutti gli altri. Prendiamo due punti che chiamiamo P_1 e P_2 della retta in figura; conduciamo da P_1 la perpendicolare all'asse delle x , e in questo modo individuiamo un triangolo rettangolo i cui cateti sono legati alle coordinate del punto P_1 , ammettiamo che il punto P_1 abbia coordinate (x_1, y_1) :

$$P_1=(x_1, y_1);$$

allora il cateto verticale del triangolo piccolo misura y_1 , mentre il cateto orizzontale misura x_1 .

Questo per il significato che hanno le coordinate cartesiane di un punto e anche per la posizione della retta nel piano considerati. Se invece di prendere

una retta che occupa il primo e il terzo quadrante ne prendo una che occupa il secondo e il quarto allora devo tenere il conto anche dei segni di x e y .

Ma anche in questo caso dovrei tenere conto dei segni di x e y se i punti P_1 e P_2 , li prendessi nel terzo quadrante invece che nel primo, infatti nel terzo quadrante succede che sia la x che la y sono negative:

preso un punto Q nel terzo quadrante le sue coordinate sono negative.

Facciamo lo stesso discorso per il punto P_2 , quindi conduciamo la perpendicolare all'asse delle x e individuiamo un triangolo i cui cateti misurano: quello verticale y_2 se y_2 è l'ordinata del punto P_2 , ponendo che le coordinate di tale punto siano: $P_2=(x_2, y_2)$ e il cateto orizzontale misurerà x_2 .

Adesso facciamo appello al *Teorema di Talete*, il cui enunciato possiamo citare come segue:

un fascio di rette parallele determina su due trasversali classi di segmenti diversamente proporzionali tra loro.

Applichiamo il Teorema di Talete alla situazione appena costruita; in questo caso come rette parallele prendiamo quelle che contengono i cateti verticali dei due triangoli, come trasversali pensiamo all'asse delle x e alla retta considerata, e il teorema di Talete dice che le due rette parallele determinano sulle due trasversali classi di segmenti diversamente proporzionali e quindi ci permette di scrivere la seguente

proporzione: $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$. Conclusione: se prendiamo una retta che passa per l'origine, prendiamo su di essa un

punto di coordinate (x, y) , e facciamo il rapporto $\frac{y}{x}$ otteniamo un qualcosa che non dipende dal punto che ho

preso, dato che come visto nell'esempio precedente, cambiando punto, prendendo il punto P_2 , dal teorema di Talete il rapporto da lo stesso risultato; ma allora il rapporto è lo stesso per tutti i punti della retta, esso caratterizza la retta, non il punto: cambio il punto, la x e la y cambiano, ma per il teorema di Talete il rapporto non cambia. Questo rapporto è una proprietà della retta: i punti diversi dall'origine appartenenti ad una retta passante per l'origine e diversa dall'asse y hanno coordinate che soddisfano l'equazione:

$\frac{y}{x} = costante$. Questo enunciato si preoccupa di precisare "i punti diversi dall'origine" perché avendo

l'origine coordinate ambedue nulle ci mette di fronte ad un problema in quanto la divisione $\frac{0}{0}$ non è un'operazione definita (la divisione per 0 nel campo dei numeri reali non è definita).

Ma come si trova un'equazione che caratterizza la retta compreso il punto che coincide con l'origine?

Chiamata con m la costante nell'equazione che abbiamo trovato: $\frac{y}{x} = costante$ si trova $\frac{y}{x} = m$, e

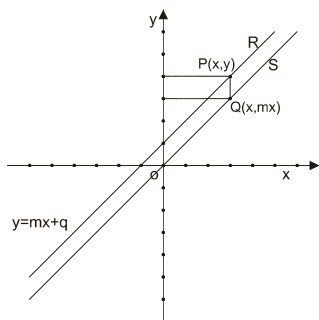
scrivendo $y = mx$ si trova l'equazione della retta considerata, ossia passante per l'origine e diversa dall'asse y . Ricordiamo che l'obiettivo è quello di giustificare l'affermazione iniziale secondo la quale le rette del piano cartesiano non parallele all'asse delle y hanno equazione $y=mx+q$. Abbiamo diviso il lavoro in due pezzi: prima abbiamo considerato una retta che passa per l'origine e applicando il teorema di Talete abbiamo trovato l'equazione $y = mx$, quindi ci resta da considerare una retta che non passa per l'origine.

Tesi: le rette non parallele all'asse y hanno equazione $y=mx+q$.

Facciamo la verifica. Infatti consideriamo una retta generica nel piano cartesiano non parallela all'asse delle y e chiamata R ; e per poter studiare l'equazione di tale retta ci riconduciamo all'esercizio precedente in cui la retta passa per l'origine, quindi prendiamo una retta S parallela ad R passante per l'origine e lavoriamo su di essa.

L'equazione della retta S è del tipo $y=mx$, quindi i punti della retta S hanno le coordinate che soddisfano questa relazione dove m è una costante opportuna.

Adesso ci aiutiamo con la retta S per trovare l'equazione che caratterizza la retta R , che è quella che ci interessa, quindi prendiamo sulla retta R un punto generico P di coordinate (x, y) , e vogliamo sapere che legame c'è tra la sua x e la sua y , questa è l'equazione della retta o di un luogo geometrico qualunque, una formula o un'equazione soddisfatta dalle coordinate di quel punto, ossia dalle coordinate di tutti i punti di quel luogo. Ma come facciamo a ricondurci alla retta S : mandiamo da P un segmento parallelo all'asse y fino ad incontrare la retta S in un'altro punto che chiamiamo Q . Adesso sfruttiamo il fatto che siccome Q appartiene alla retta S le sue coordinate sono legate dall'equazione $y=mx$; e ci chiediamo quali siano le coordinate di Q .



Per costruzione l'ascissa di Q è x e la sua ordinata è mx , perché la ricaviamo dalla condizione che le coordinate devono soddisfare per il fatto che Q sta sulla retta S (è qui che abbiamo sfruttato il passo precedente); ora dobbiamo ricavare la y di P partendo dalla y di Q , o in altre parole trovare il legame che c'è tra l'ordinata y del punto P e l'ordinata mx del punto Q , ma nella figura $y-mx$ è la lunghezza del segmento \overline{PQ} . Nota bene: non dipende da P , cioè se spostiamo il punto P lungo la retta R la lunghezza del segmento corrispondente a \overline{PQ} trovato, non cambia. In generale risulta che la

differenza $y-mx$ è costante:

$$y-mx = costante.$$

Quello che cambia è che questa differenza può essere negativa quindi non si può sempre dire che sia la lunghezza di un qualche segmento; se prendiamo la retta R più in basso allora essa starebbe sotto la retta S e la differenza $y-mx$ risulterebbe negativa e non si potrebbe dire: è la lunghezza del segmento, ma è $-(la\ lunghezza)$ del segmento. In ogni caso è costante, in generale la differenza $y-mx$ non dipende dal punto

considerato, ma è una caratteristica della retta, non del punto, tutti i punti della retta R soddisfano la relazione $y=mx+q$, dove q è la costante; quindi siamo arrivati a concludere quello che volevamo dimostrare:
le rette non parallele all'asse y hanno equazione $y=mx+q$.