Definizione di circonferenza e cerchio.

Equazione della circonferenza centrata in *O* e di raggio *R*.

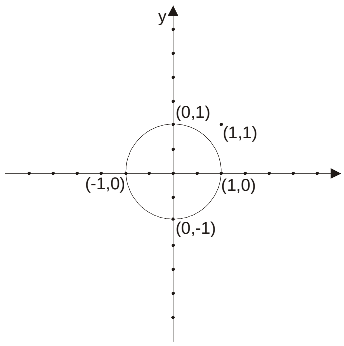
Esercizi.

La circonferenza e il cerchio

Definizioni:
dato un punto *C* nel piano cartesiano e dato un numero positivo $R>0$ si dice circonferenza di centro *C* e raggio *R* l'insieme dei punti del piano la cui distanza dal punto è $C=R$.
Si dice cerchio (cerchio aperto) l'insieme dei punti del piano la cui distanza da *C* è minore di *R*: $C<R$.
Per capire se un certo punto le cui coordinate siano note appartiene o no a un certo cerchio, a una certa circonferenza di dato centro e dato raggio, torna comodo il Teorema di Pitagora.
Per studiare la circonferenza è importante conoscere il Teorema di Pitagora:
in un triangolo rettangolo il quadrato costruito sulla ipotenusa è equivalente (ossia ha la stessa area) alla somma dei quadrati costruiti sui cateti.
Vediamo come si può usare il teorema di Pitagora per studiare la circonferenza.

Esercizio n° 1

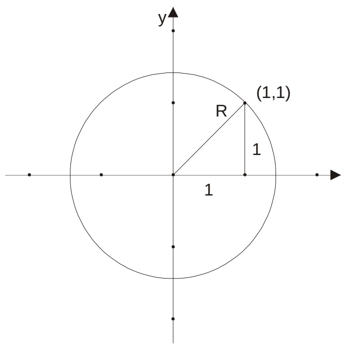
Stabilire se il punto di coordinate *(1,1)* appartiene alla circonferenza centrata nell'origine e di raggio *1*.



Se prendo una circonferenza centrata nell'origine e di raggio *1*, i quattro punti di intersezione con gli assi coordinati avranno coordinate che sono *(1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1)*, quindi senza bisogno di usare il teorema di Pitagora si può dire che il punto di coordinate *(1,1)* non appartiene alla circonferenza,

Esercizio n° 2

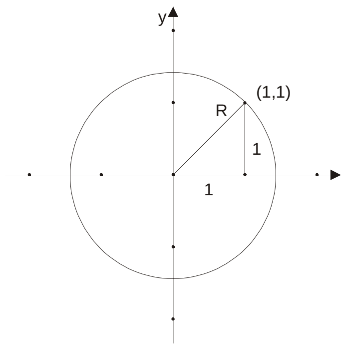
Trovare il raggio della circonferenza centrata nell'origine e passante per il punto di coordinate *(1,1)*.



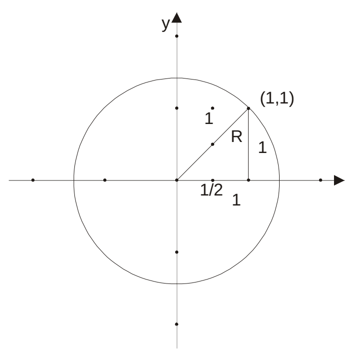
Troviamo il raggio *R* della circonferenza centrata nell'origine e passante per il punto dato *(1,1)*. A questo punto può far comodo il teorema di Pitagora.
Si tratta di trovare, in base alla definizione di circonferenza, la distanza di quel punto dall'origine (la circonferenza è il luogo dei punti del piano la cui distanza dal centro, che deve essere l'origine è uguale al raggio) quindi per trovare il raggio basta trovare la distanza di un qualunque punto di essa dal centro, quindi trovare la lunghezza del segmento diagonale che partendo dall'origine interseca la circonferenza nel punto di coordinate *(1,1)*.
Per farlo basta costruire un triangolo rettangolo che abbia per ipotenusa il raggio del cerchio dato e i cateti paralleli agli assi. Siccome il punto ha coordinate *(1,1)* per ipotesi, questi cateti hanno lunghezza *1* e *1* rispettivamente. A questo punto prendiamo il teorema di Pitagora che ci dice che il quadrato dell'ipotenusa R^2 è uguale alla somma dei quadrati dei cateti:
$R^2=1^2+1^2=2$, quindi la risposta sarà: $R=\sqrt{2}$

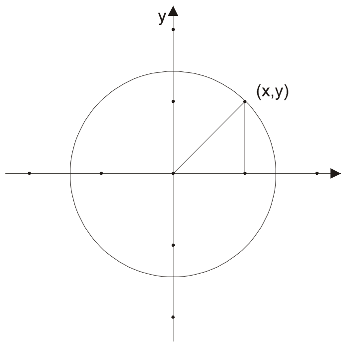
Esercizio n° 3

Trovare con il raggio l’equazione cartesiana della circonferenza centrata nell’origine e passante per il punto di coordinate *(1,1)*.
Trovare l’equazione, in base al principio fondamentale della geometria analitica significa trovare l’equazione che viene soddisfatta da tutti e solo i punti che appartengono al luogo considerato, questo è veramente il principio su cui si fonda la geometria analitica.
In generale un’equazione in due variabili $f(x,y)=0$ (si legge f di xy uguale 0) (per scrivere una qualunque equazione si può usare questo espediente dove il 1° membro $f(x,y)$ vuol dire un’espressione che contiene le variabili x e y, questo è un modo per rappresentare un’equazione senza nessuna particolarità, un’equazione qualunque). Un’equazione così fatta rappresenta una linea γ (gamma) (per rappresentare le linee si utilizza la lettera greca γ) quando avviene che un qualunque punto (per tutti i punti) di coordinate (x,y) del piano cartesiano si può dire (vale) quanto segue:
il punto (qualsiasi) (x,y) sta sulla (appartiene alla) linea γ se e solo se x e y soddisfano (risolvono) l’equazione.
Dunque è l’idea su cui si basa la geometria analitica che permette di trasformare le linee in equazioni e le equazioni in linee. Come si fa ad identificare una linea γ con una determinata equazione?
Usando il seguente criterio:
la linea γ ha per equazione una determinata equazione quando avviene che preso un punto a piacere del piano, quale che esso sia,
esso sta su γ se sostituendo i valori nell’equazione mi da 0,
non sta su γ se non mi da 0.
Quindi la chiave di volta per stabilire l’appartenenza alla linea γ di un punto è il soddisfacimento di quella equazione.
Se l’equazione, sostituiti i valori numerici, da uguale vuol dire che quel punto sta nella linea, se da diverso non sta sulla linea; è per questo motivo che l’equazione si identifica con la linea, ossia si può dire questa è l’equazione di questa linea, che è il criterio che da la parola finale sull’appartenenza alla linea o meno.



Data la circonferenza centrata nell’origine γ (in figura) e di raggio $R=\sqrt{2}$, la domanda è: quale è l’equazione di tale circonferenza?
Cosa devo scrivere al *1°* membro dell’equazione che finisce con $=0$?
Al *1°* membro devo mettere una $f(x,y)$.
Ossia cosa devo scrivere al *1°* membro in modo tale che quando il punto sta nella circonferenza sostituisco i valori al primo membro e mi da 0, quando non sta nella circonferenza non mi da 0?
Ma la definizione di circonferenza dice che se prendo un punto qualsiasi di coordinate (x,y) esso è appartenente alla circonferenza quando dista dal centro $\sqrt{2}$.
Nel caso specifico abbiamo detto che le coordinate del punto sono $(1,1)$, ma se avessimo detto che sono per esempio $(50,60)$ o $(0{,}5,0{,}3)$, applicheremmo il teorema di Pitagora, faremmo il conto fatto nell’esercizio precedente, ossia $Raggio=\sqrt{x^2+y^2} \rightarrow R^2=1^2+1^2=2$ e verificheremmo se la distanza dall’origine è uguale o no a $\sqrt{2}$. Se per esempio prendiamo il punto $\left(\frac{1}{2},1\right)$ (prima di usare le lettere facciamo un esempio numerico) e verifichiamo se esso sta su γ. Si vede a occhio che il punto $\left(\frac{1}{2},1\right)$ non sta su γ.





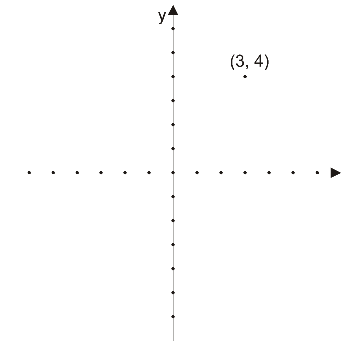
Se però considero un generico punto *(x,y)* dove la *x* e la *y* non sono date perché voglio fare uno studio generale per tutti i punti del piano, ossia voglio una legge generale, allora prendo un punto le cui coordinate sono due lettere e come faccio a vedere se il punto sta o no su *γ*: applico il teorema di Pitagora al triangolo i cui cateti sono paralleli agli assi coordinati e trovo che il punto *(x,y)* dista dall'origine $\sqrt{x^2+y^2}$.

Come si fa a saper se il punto *(x,y)* sta sulla circonferenza *γ* ?

Sta su *γ* se e solo se $\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{2}$, ossia il punto *(x,y)* sta su *γ* se e solo se $x^2+y^2=2$ (le radici vanno via), e quindi l'equazione si può scrivere: $x^2 + y^2 - 2 = 0$, che è l'equazione della circonferenza *γ* (in figura) centrata nell'origine e di raggio $R=\sqrt{2}$

Esercizio 1

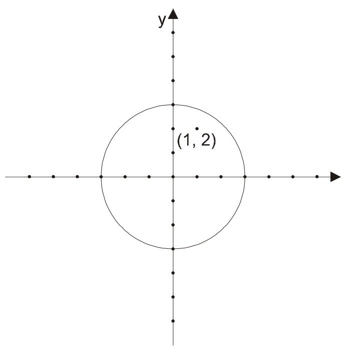
Trovare la distanza del punto di coordinate *(3,4)* dall'origine (suggerimento; si può usare il teorema di Pitagora)



Chiamata *d* la distanza del punto di coordinate *(3,4)* dall'origine secondo il teorema di Pitagora abbiamo: $d = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25 = 5}$

Esercizio 2

Stabilire se il punto di coordinate *(1,2)* appartiene al cerchio centrato nell'origine e di raggio *3*.

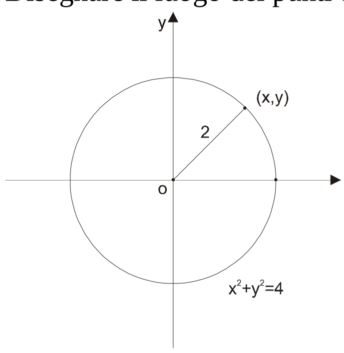


A occhio sembra che il punto considerato appartenga al cerchio.
Per essere sicuri misuriamo la distanza *d* del punto dall'origine: $d = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$.

A questo punto dobbiamo stabilire se il valore di *d* è più piccolo del raggio che è *3*, ossia se $\sqrt{5} < 3 \rightarrow (\sqrt{5})^2 < (3)^2 \rightarrow 5 < 9$
la risposta è si perchè *5* senza radice è minore di *9* che è il quadrato di *3*.

Esercizio 3

Disegnare il luogo dei punti del piano cartesiano le cui coordinate *(x,y)* soddisfano l'equazione $x^2+y^2=4$.

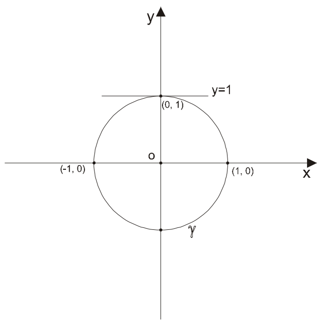


Viene una circonferenza di raggio *2*.

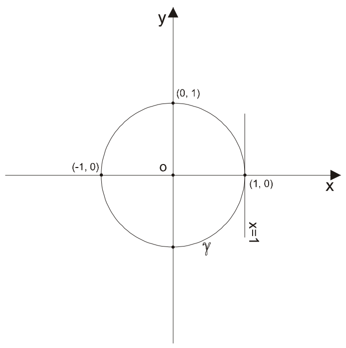
Esercizi sulla determinazione delle rette tangenti ad una circonferenza in punti notevoli

Esercizio 4

Indicata con γ la circonferenza centrata nell'origine e di raggio *1*, determinare le equazioni delle rette tangenti a γ nei punti di coordinate *(0,1)*, *(1,0)*, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

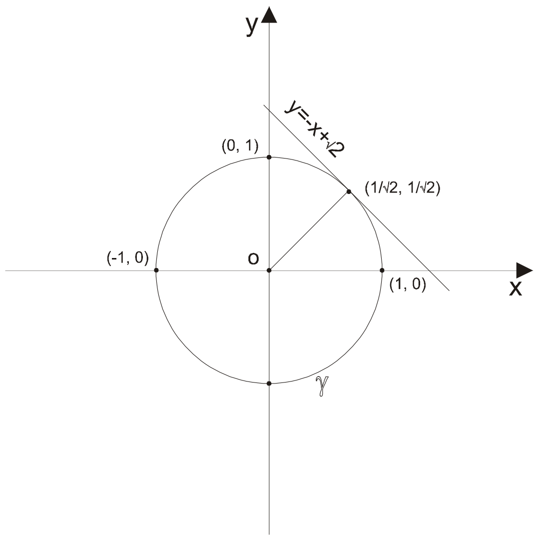


Sfruttiamo il fatto che le tangenti a una circonferenza sono perpendicolari al raggio, quindi la tangente in questa sommità della circonferenza sarà una retta parallela all'asse delle *x* con equazione del tipo *y=costante*, dunque l'equazione è *y=1*



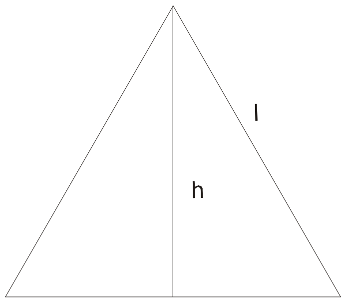
Passiamo al punto *(1,0)*: la retta perpendicolare al raggio sarà parallela all'asse delle *y* e la sua equazione sarà *x=1*.

x=1



Passiamo al punto $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Il punto considerato ha le due coordinate uguali fra loro quindi giace sulla bisettrice del primo quadrante che è formata da punti equidistanti dagli assi coordinati. Una volta individuato il punto prendo in considerazione la retta tangente. Essa è inclinata di 45° rispetto agli assi coordinati e quindi parallela alla bisettrice del *2*° del *4*° quadrante la cui equazione è $y=-x$, ovvero il coefficiente angolare della retta che dobbiamo studiare è -1 perché se costruisci un qualunque triangolo rettangolo avente l'ipotenusa coricata lungo la retta considerata e i cateti paralleli agli assi cartesiani puoi interpretare il coefficiente angolare di questa retta come (a meno del segno) il rapporto fra le lunghezze dei due cateti e precisamente il coefficiente angolare è l'incremento della *y* che corrisponde a un incremento unitario della variabile *x*; siccome questa retta forma un angolo di *45*° l'incremento della *y* è opposto a quello della *x*, se la *x* aumenta di una unità la *y* diminuisce di una unità, e così via. Ma allora il rapporto incrementale per questa retta da $m=-1$, rette parallele hanno lo stesso coefficiente angolare come abbiamo già visto in precedenza. Trovato il coefficiente angolare siamo a metà dell'opera perche la retta che stiamo cercando avrà equazione $y = -x + q$, quindi resta da determinare il termine noto, che è l'ordinata del punto di intersezione con l'asse delle *y*; per determinare tale punto osservo il triangolo in figura e noto che esso può essere diviso in due ulteriori triangoli rettangoli aventi in comune il raggio del cerchio. Quindi posso trovare *q* applicando il teorema di Pitagora: sapendo che il raggio (cateto del triangolo) è uguale *1* $q = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, e l'equazione della retta tangente cercata è $y = -x + \sqrt{2}$.

Per risolvere il problema seguente sono indispensabili le seguenti abilità:
1. conoscere il teorema di Pitagora,
2. conoscere le proprietà dei triangoli equilateri e le relazioni tra il lato e l'altezza di essi,
3. conoscere l'interpretazione geometrica del coefficiente angolare e del termine noto.



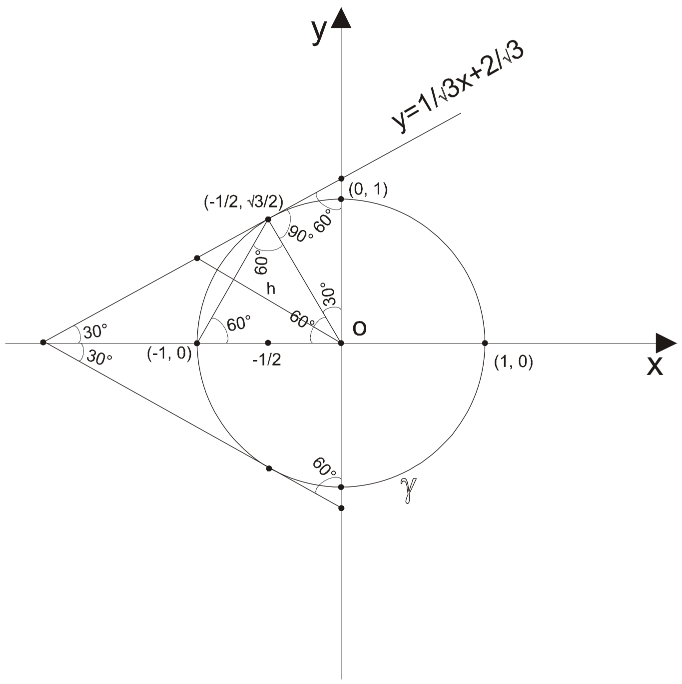
Per risolvere il problema seguente conviene richiamare una proprietà fondamentale del triangolo equilatero, cioè la relazione intercorrente tra l'altezza e il lato di esso. Indicata con *h* l'altezza e con *l* il lato, sappiamo che la base è divisa dall'altezza in due parti uguali che misurano $\frac{l}{2}$, quindi dal teorema di Pitagora segue che:

$$l^2 = h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \to l^2 = h^2 + \frac{l^2}{4} \quad h^2 = l^2 - \frac{l^2}{4} = \frac{3}{4} l^2 \to \ h = \frac{\sqrt{3}}{2} l$$

che rappresenta la relazione che c'è tra l'altezza ed il lato di qualunque triangolo equilatero. Sfruttando questa relazione si riconosce che il triangolo della figura che segue è equilatero perché tra il suo lato e l'altezza intercorre proprio questa relazione.

Passiamo al punto $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Visto che il raggio della circonferenza è unitario, la base è unitaria; visto che l'ascissa del vertice è $-\frac{1}{2}$, quindi il piede dell'altezza divide in due parti uguali il triangolo; visto che l'altezza del triangolo è $\frac{\sqrt{3}}{2}$ si conclude che il triangolo è equilatero e quindi i suoi angoli sono di *60°* l'uno. Richiamiamo il fatto che la retta tangente ad una circonferenza in un certo punto è perpendicolare al raggio che passa per quel punto di tangenza quindi forma con il raggio angoli di *90°*. L'angolo complementare ad un angolo di *60°* è *30°*, perché la somma deve essere *90°*.

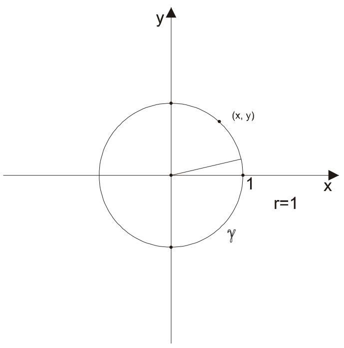


Prendiamo il triangolo formato dall'asse delle *x*, dalla tangente alla circonferenza e consideriamo il suo simmetrico rispetto all'asse delle *x*; l'unione di questi due triangoli rettangoli è un triangolo equilatero perché i due triangoli sono rettangoli e hanno noti l'angolo di *90°* e uno di *60°*, dunque il terzo angolo è di *30°*, se lo uniamo al suo simmetrico otteniamo un triangolo con tre angoli di *60°* ciascuno (la somma deve essere *180°*). Possiamo dunque trovare il coefficiente angolare della tangente, facendo il rapporto tra il semilato e l'altezza di un triangolo equilatero: $\frac{\frac{1}{2}}{h} = \frac{1}{\sqrt{3}} = m$

Dobbiamo ancora determinare il termine noto. Per determinare il termine noto abbiamo bisogno dell'ordinata del punto di intersezione con l'asse delle *y*, per trovarla possiamo riprendere in considerazione il triangolo avente come cateti il raggio e la metà di esso; se prendo anche il simmetrico rispetto al raggio costruisco un triangolo equilatero, il cui lato è proprio il *q* che devo determinare mentre l'altezza vale *1*, ma allora *q* si può ricavare da questa formula: $(\frac{\sqrt{3}}{2})q = h$; ma *h=1* perché per ipotesi la circonferenza ha raggio *1* quindi $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)q = 1$ quindi $q = \frac{2}{\sqrt{3}}$ e quindi l'equazione cercata è $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{2}{\sqrt{3}}$

Esercizio 5

Consideriamo un numero *x* tale che $-1 < x < 1$. Approfittiamo dell'esercizio per introdurre la notazione degli intervalli. Si dice che l'intervallo *(a,b)* è l'insieme dei numeri reali *x* tali che sono maggiori di *a* e minori di *b*,e *a* e *b* sono gli estremi dell'intervallo: *a<x<b*.



Dunque l'esercizio 5 considera l'intervallo $(-1,1)$ e ci chiede di determinare un *y* tale che il punto di coordinate *(x,y)* appartenga alla circonferenza *γ* centrata nell'origine e di raggio *1*. Dato $x \in (-1,1)$ trovare *y* tale che $(x,y) \in \gamma$. Risposta: ci sono due soluzioni che sono:

$y_1 = \sqrt{1-x^2}$ e $y_2 = -\sqrt{1-x^2}$.

Motivazione: dobbiamo esprimere la condizione di appartenenza di un punto ad una curva sfruttando l'idea fondamentale della geometria analitica, l'equazione della curva e il significato dell'equazione di una curva. Quindi cominciamo con l'osservare che la condizione $(x,y) \in \gamma$ equivale al soddisfacimento dell'equazione della circonferenza *γ*, quindi $x^2+y^2=1$ (dove *1* è il raggio al quadrato). Sappiamo che si può identificare una curva con un'equazione, quindi si può trasformare un oggetto geometrico come una curva in un oggetto algebrico come un'equazione , sì che una curva è rappresentata da un'equazione quando un punto qualunque del piano di coordinate *(x,y)* appartiene o non appartiene ad una curva a seconda che le coordinate *(x,y)* sostituite nell'equazione la soddisfano o meno, quindi il soddisfacimento dell'equazione diventa il criterio per stabilire l'appartenenza.

Quindi *x* è un dato nell'intervallo $(-1,1)$, io devo trovare *y* tale che $x^2+y^2=1$ e per farlo non lavoro su una figura ma su un'equazione, dato *x* troviamo *y* tale che valga l'uguaglianza. Quindi ricaviamo questo *y* e troviamo: $y^2 = 1-x^2$. Il termine noto dell'equazione della circonferenza è il raggio al quadrato.