Interpretazione geometrica del coefficiente angolare e del termine noto.

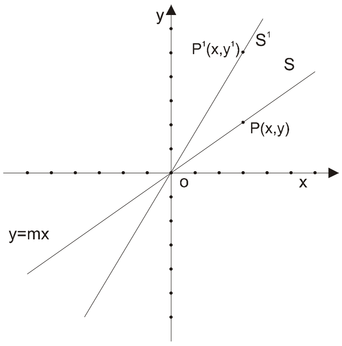
Notazione funzionale *y(x)*.

Rapporto incrementale della funzione $y(x)=mx+q$.

Equazione della retta nel piano cartesiano.

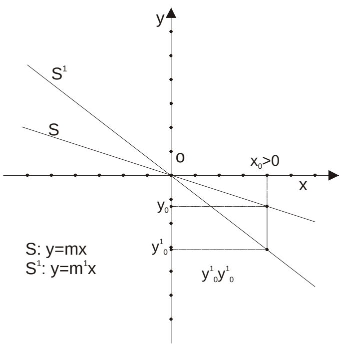
Discutiamo il significato geometrico dei parametri.

Il parametro m si chiama coefficiente angolare e il parametro q si chiama termine noto.
Vediamone una interpretazione geometrica, cominciando dal coefficiente angolare.
Ricordiamo da dove veniva fuori: se prendiamo una retta S che passa per l'origine i suoi punti P hanno coordinate (x,y) che soddisfano la relazione $\frac{y}{x}=m$ purché la x sia diversa da 0 altrimenti la divisione non è definita. Dunque il coefficiente angolare di una retta passante per l'origine si può interpretare come il rapporto tra l'ordinata e l'ascissa di un qualunque punto della retta stessa diverso dall'origine. Il coefficiente angolare ci permette di fare dei confronti tra rette. Prendo una retta diversa da S e la chiamo S^1 .



L'equazione di S^1 sarà del tipo $\frac{y}{x}=m^1$, sempre escludendo l'origine per il momento. Confrontiamo m con m^1 e cerchiamo di capire quale sarà più grande e quale sarà più piccolo e magari anche quale sarà il segno di m e di m^1. Per fare un confronto tra m e m^1 ci conviene prendere due punti diciamo P e P^1 che abbiano la stessa ascissa x perché in questo modo i denominatori delle frazioni sono uguali tra loro mentre i numeratori non saranno uguali:
P avrà coordinate (x,y) mentre P^1 (x,y^1).
Dalla figura si deduce che m^1 è maggiore di m.
Ruotando la retta S in senso antiorario fino a raggiungere S^1 abbiamo aumentato il suo coefficiente angolare che è passato da un valore m ad un valore m^1 (che è più grande di m); m ed m^1 sono eguagliati da queste relazioni al rapporto tra quantità che in generale variano lungo la retta, ma ci fissiamo ai punti P e P^1 particolari presi nel disegno; risulta che x, y e y^1 sono tre numeri tutti positivi e allora sono positivi anche questi rapporti, quindi possiamo concludere che siccome x, y e y^1 sono tutti maggiori di 0, si deduce che sia m che m^1 sono maggiori di 0.

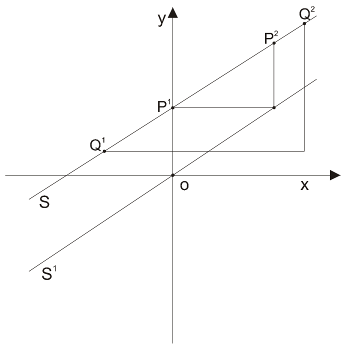
Retta S: $\frac{y}{x}=m$; retta S^1 $\frac{y}{x}=m^1$;
siccome $y^1>y$ si deduce $m^1>m$;
siccome $x=x_p$, $y_p>0$ e $y^1{}_p>0$ si deduce $m>0$ e $m^1>0$.
Se poi temiamo di confondere le coordinate di P e P^1 particolari, ossia x, y e y^1 , con le variabili x e y che assumono anche valori negativi, per evitare ambiguità possiamo usare degli indici e indicare con x_p l'ascissa del punto P, con y_p la sua ordinata e con $y^1{}_{p1}$ l'ordinata del punto P^1



Facciamo un'altro esempio. Consideriamo le rette S ed S^1 in figura, le loro equazioni sono rispettivamente $y=mx$ e $y=m^1x$, cambia solo il coefficiente angolare.
Vogliamo ancora confrontare m con m^1 per dire quale è più grande e quale è più piccolo e anche trovare i segni di m e di m^1. Procediamo come abbiamo fatto in precedenza, quindi fissiamo la x e la chiamiamo x_0 (per dire che non è una variabile ma un numero fissato, preso positivo per semplificare i calcoli) e poi interpretiamo m e m^1. C'è un punto della retta S che ha per ascissa x_0 e per ordinata una quantità che indichiamo con y_0 negativa, sulla retta S^1 che ha la stessa ascissa x_0 e l'ordinata $y^1{}_0$ anch'essa negativa. Siccome il punto P e il punto P^1 appartengono rispettivamente alle rette S ed S^1 le loro coordinate devono soddisfare le corrispondenti equazioni e quindi si dovrà avere che $y_0=mx_0$, $y^1{}_0=m^1x_0$; da queste

relazioni possiamo ricavare che: $m = \frac{y_0}{x_0} < 0$, mentre $m^1 = \frac{y^1{}_0}{x_0}$; la regola dei segni ci da subito il segno di m ed m^1, perché i denominatori sono positivi per costruzione, perché abbiamo scelto di partire da un valore positivo di x_0 , le ordinate y_0 e $y^1{}_0$ sono negative quindi questi due rapporti sono entrambi negativi per la regola dei segni, quindi le rette disposte come quelle in figura hanno coefficiente angolare negativo a differenza delle altre considerate nell'esempio precedente che hanno coefficiente angolare positivo. Cerchiamo di stabilire se m è più grande di m^1. Per confrontare m con m^1 cominciamo con il confrontare y_0 e $y^1{}_0$ e notiamo che $y_0 > y^1{}_0$. Partiamo dalla disuguaglianza $y^1{}_0 < y_0$ e dividiamo ambo i membri per x_0 perché così facendo ci ritroviamo al primo membro m^1 e al secondo membro m e possiamo confrontarli fra di loro. Però per poter fare questa divisione dobbiamo tener conto del segno di x_0. Poiché $x_0 > 0$ la disuguaglianza $y^1{}_0 < y_0$ si conserva. Moltiplicando o dividendo ambo i membri di una disuguaglianza per una stessa quantità positiva la disuguaglianza si conserva quindi così facendo otteniamo al primo membro m^1, al secondo membro m e la disuguaglianza si conserva: dunque $m^1 < m$. In conclusione anche se disponiamo le rette come in figura, ruotando in senso antiorario, il coefficiente angolare aumenta. L'obiettivo era l'interpretazione geometrica del coefficiente angolare. Esso misura l'inclinazione di una retta rispetto agli assi cartesiani e varia aumentando quando le rette ruotano in senso antiorario senza scavalcare l'asse delle y, che è una singolarità, infatti l'asse delle y è escluso da questo tipo di rappresentazione, infatti si parla di rette non parallele all'asse delle y, quindi esso non va scavalcato nella manovra di rotazione della retta.

Coefficiente angolare di una retta che non passa per l'origine.

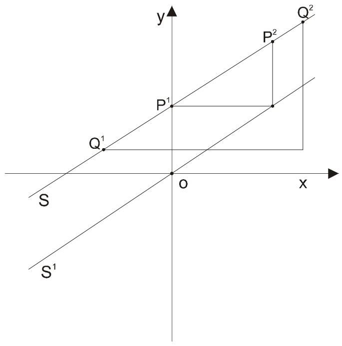


Prendiamo adesso una retta generica che non passa necessariamente per l'origine. Andiamo anche in questo caso ad interpretare il coefficiente angolare. Le considerazioni di similitudine basate sul Teorema di Talete già fatte precedentemente ci permettono di affermare quanto segue: se prendiamo due punti qualunque P^1 e P^2 (magari il secondo lo prendiamo più a destra del primo) lungo la retta S e poi costruiamo un triangolo rettangolo avente per ipotenusa il segmento $\overline{P^1P^2}$ e i cateti paralleli agli assi coordinati, il rapporto tra la lunghezza dei cateti non dipende da dove sono stati presi i punti P^1 e P^2. Se infatti prendiamo i punto Q^1 e Q^2 e costruiamo un'altro triangolo rettangolo con le stesse modalità, ancora per il teorema di Talete si giunge alla conclusione che i due triangoli così ottenuti sono simili fra loro cioè sussiste una relazione di proporzionalità diretta fra, per esempio, i loro cateti; e quindi il cateto verticale del triangolo piccolo sta al suo cateto orizzontale come il cateto verticale del triangolo grande sta al suo cateto orizzontale, il rapporto è lo stesso ed è il coefficiente angolare; lo sappiamo perché partendo da una retta in posizione generica abbiamo considerato la parallela ad essa che passa per l'origine e poi abbiamo osservato che il rapporto fra il cateto verticale e il cateto orizzontale è lo stesso per tutti i punti della retta S.
Facciamo due conti algebrici: traduciamo in un calcolo algebrico le considerazioni geometriche fatte. Consideriamo la retta di equazione $y=mx+q$ e studiamo il rapporto (rapporto incrementale):

$$\frac{y(x_2)-y(x_1)}{x_2-x_1}.$$

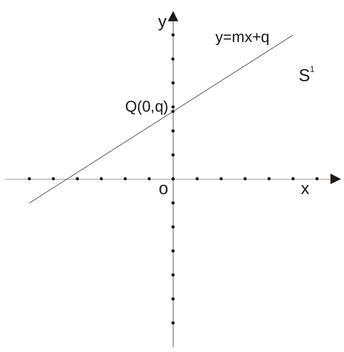
Questo rapporto esprime algebricamente il rapporto fra le lunghezze dei cateti di cui abbiamo appena parlato perché al numeratore con la notazione funzionale $y(x_1)$ e $y(x_2)$ abbiamo inteso denotare le ordinate dei punti P_1 e P_2. Il punto P_1 avrà coordinate $(x_1,y(x_1))$ e il punto P_2 $(x_2, y(x_2))$:
$P_1=(x_1,y(x_1))$
$P_2=(x_2,y(x_2))$
L'uso delle parentesi in questo caso serve per mettere in evidenza il cosiddetto legame funzionale tra le variabili x e y. Conviene soffermarsi su questa notazione. Si chiama notazione funzionale. La notazione funzionale $y(x)$ dice (e significa) che il valore della y è legato a quello della x da un legame funzionale, cioè assegnato il valore della x quello della y resta determinato. Infatti l'equazione della retta istituisce proprio un legame di tale tipo: se assegni il valore della x , dopo non puoi prendere una y qualunque se no esci dalla retta, il valore della y risulta determinato da questa formula, quindi ho un semplice esempio di legame

funzionale tra le variabili x e y, e si può scrivere sfruttando questa notazione invece che y e basta, quando si vuole mettere in evidenza il legame funzionale si usa la notazione $y(x)=$ con le parentesi.
Adesso affrontiamo il problema: consideriamo la retta di equazione $y=mx+q$ e studiamo il rapporto incrementale.



Questo rapporto si interpreta geometricamente come il rapporto fra i cateti del triangolo piccolo. Perche al numeratore c'è la differenza fra le ordinate y dei punti considerati, che da la lunghezza del cateto verticale, e ,al denominatore, la differenza tra le ascisse da la lunghezza del cateto orizzontale. Quindi la seguente espressione algebrica rappresenta il rapporto precedentemente considerato. Adesso la manipoliamo algebricamente, invece di fare considerazioni di similitudine basate sul teorema di Talete, sfruttiamo l'equazione della retta, cioè sostituiamo al posto di $y(x_2)$ e di $y(x_1)$ le loro espressioni, che risultano dall'equazione della retta; un semplice esercizio di sostituzione.

Risulta: $\dfrac{y(x_2)-y(x_1)}{x_2-x_1}=\dfrac{(mx_2+q)-(mx_1+q)}{x_2-x_1}=\dfrac{m(x_2-x_1)}{x_2-x_1}=m$; ossia per trovare $y(x_2)$ si deve sostituire alla variabile x, che è una variabile che varia nell'insieme dei numeri reali il particolare valore x_2, cioè l'ascissa del punto P_2; quando la sostituisco trovo come risultato (mx_2+q), e questo è $y(x_2)$. Faccio la stessa cosa per $y(x_1)$ e trovo (mx_1+q); faccio la differenza tra i due valori e poi divido per x_2-x_1; la quantità q si semplifica perché abbiamo $+q$ e $-q$, metto la m in evidenza al numeratore, e semplificando ottengo m purché i punti P_1 e P_2 siano distinti, cioè purché x_1 sia diverso da x_2. Se invece si prendono x_1 e x_2 uguali fra loro, a parte che i punti P_1 e P_2 coincidono, c'è poi il problema algebrico di avere ancora una volta il rapporto $\dfrac{0}{0}$, e la frazione non ha significato, non è definita.
Quindi il coefficiente angolare di una retta generica è uguale al rapporto incrementale, perché il numeratore e il denominatore sono due incrementi o variazioni; il numeratore è l'incremento della variabile y e il denominatore è l'incremento della variabile x; incremento inteso come aumento algebrico; cioè nulla vieta di prendere $x_2 < x_1$, a differenza di come si è voluto procedere, e il rapporto incrementale mantiene il suo significato.
Passiamo dunque al significato geometrico del termine noto per completare questa discussione.



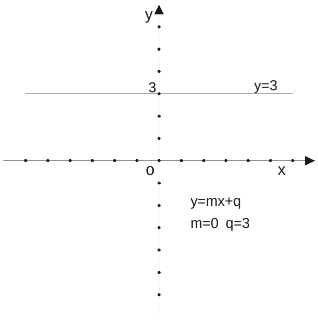
Partiamo ancora una volta da una retta generica la cui equazione è $y=mx+q$, purché non parallela all'asse delle y, e vogliamo dare un significato geometrico al termine q. Possiamo osservare, in via preliminare, che la condizione $q=0$ fa succedere che l'equazione si riduce a $y=mx$ e quindi ci dice che la retta passa per l'origine. In ogni caso, a parte questa osservazione, risulta che sostituendo nell'equazione della retta $x=0$, si trova $y=q$, la qual cosa si può sintetizzare in questo modo: $y_0=q$, cioè sfrutto la notazione funzionale introdotta in precedenza. Cioè con y_0 voglio dire che prendo l'equazione, la quale istituisce un legame funzionale tra x e y, ossia assegnando un valore a x e facendo il calcolo si trova y, e assegno un valore di $x=0$, faccio questo calcolo da cui risulta $m \cdot 0 = 0$ e trovo q: ecco il significato di questa formula che mi permette di scrivere con quattro simboli tutto un discorso, quindi è una notazione molto potente. Se quella in figura è la retta di equazione $y=mx+q$, assegnare alla variabile x il valore 0 significa trovare lungo la retta considerata il punto di ascissa nulla, cioè il punto Q in figura, che ha coordinate $(0,q)$ ossia ascissa uguale 0 per costruzione e ordinata che si ricava come appena detto, e che ci da q. Quindi il termine noto q dell'equazione di una retta in forma esplicita rappresenta l'ordinata del punto di intersezione tra la retta considerata e l'asse delle y.

Esercizi riepilogativi:

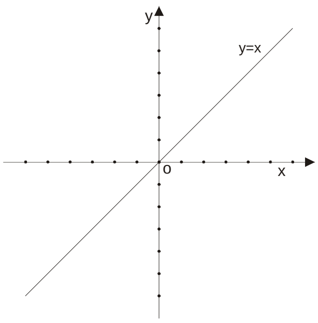
1. Trovare due costanti m e q tali che per ogni x reale (ossia per ogni valore reale della variabile x) risulti $x^2=mx+q$.

Sappiamo che le rette non parallele all’asse y,e solo loro, hanno equazione $y=mx+q$, quindi l’esercizio mi chiede di trovare i parametri m e q di una retta in modo che la retta stessa rappresentata dall’espressione al secondo membro sia uguale a una figura che retta non è, perche le rette hanno equazione $y=mx+q$: **solo loro**, le figure che rette non sono hanno un’altra equazione, la figura $y=x^2$ non è una retta perché se lo fosse avrebbe equazione $y=mx+q$, quindi con considerazioni elementari si può concludere che non esistono costanti siffatte perché non si può eguagliare l’equazione di una retta a un’espressione che non è di una retta.

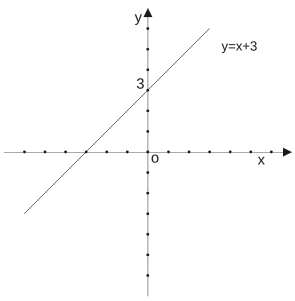
2. Disegnare le rette di equazione: $y=3$; $y=x$; e $y=x+3$.



La risposta è abbastanza immediata. $y=3$ è il luogo dei punti del piano xy la cui ordinata è uguale a 3, quindi stanno su una retta parallela all’asse x che interseca l’asse y nel punto di ordinata 3. Questa retta ha la forma $y=mx+q$, che è la forma generale delle rette non parallele all’asse delle y dove però $m=0$ e $q=3$;così ritroviamo il significato geometrico del termine noto, che è quello di ordinata del punto di intersezione con l’asse delle y, e vediamo anche che le rette con coefficiente angolare nullo sono parallele all’asse delle x o come si dice “sbrigativamente” sono orizzontali. Il coefficiente angolare nullo corrisponde alla posizione, cioè alla orientazione orizzontale della retta. Quindi il coefficiente angolare da l’inclinazione , e da 0 se la retta è orizzontale, risulta positivo se la retta è inclinata in un certo modo, negativo se inclinata nell’altro.



Passiamo a $y=x$. $y=x$ è il luogo dei punti del piano aventi la proprietà che la loro ascissa e la loro ordinata sono uguali. Essi possono cambiare se cambio il punto: cambiano sia l’ascissa che l’ordinata ma rimangono uguali fra loro. Quindi ci saranno il punto $(1,1)$, il punto $(2,2)$, il punto $(-1,-1)$, eccetera, ma sono punti la cui x è uguale alla y,e quindi devono stare sulla retta bisettrice del primo e del terzo quadrante perché tutti e soli i punti di questa retta hanno l’ascissa x uguale all’ordinata y. L’equazione $y=x$ caratterizza la retta in figura.



Passiamo a $y=x+3$. Abbiamo appena fatto $y=x$. Si tratta solo di aggiungere 3, il coefficiente angolare rimane lo stesso, e abbiamo visto le interpretazioni; il rapporto incrementale, se si va a costruire un triangolo in quel modo il rapporto tra i cateti rimane 1,il che vuol dire che i cateti hanno la stessa lunghezza e quindi l’inclinazione di questa retta è la stessa della retta $y=x$ e le due rette sono parallele tra loro; avere lo stesso coefficiente angolare ci da la condizione di parallelismo, quello che cambia è il punto di intersezione con l’asse delle y, che sarà 3.
Quindi possiamo disegnare la retta in figura